

В. Ф. ЖУРАВЛЕВ, Д. М. КЛИМОВ



**ВОЛНОВОЙ
ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ
ГИРОСКОП**

„Наука“

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Институт проблем механики АН СССР

В. Ф. ЖУРАВЛЕВ, Д. М. КЛИМОВ

ВОЛНОВОЙ ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ ГИРОСКОП

Ответственный редактор
академик
А. Ю. ИШЛИНСКИЙ



МОСКВА
«НАУКА»
1985

Ж у р а в л е в В. Ф., К л и м о в Д. М. **Волновой твердо-
тельный гироскоп.** М.: Наука, 1985.

В книге приведены основные математические модели гироскопа. Рассмотрены методы их анализа. Построена теория принципиального функционирования идеального гироскопа. Изучены способы возбуждения незатухающих колебаний резонатора с учетом разнообразных инструментальных погрешностей прибора. Найдено влияние этих погрешностей на точность снимаемой с прибора инерциальной информации. Рассмотрены способы обработки информации, а также некоторые нелинейные явления, связанные с распространением волн по резонатору. Для специалистов в области прикладной механики и точного приборостроения.

Ил. 26, табл. 1, библи. 18 назв.

Рецензенты:

Н. В. БАНИЧУК, Ю. Г. МАРТЫНЕНКО

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена изложению теории принципиального функционирования и основных погрешностей нового датчика инерциальной информации, который основан на физическом принципе, ранее не использовавшемся для получения инерциальной информации. Этот новый физический принцип — инертные свойства упругих волн. Для его пояснения обратимся к примеру бесконечно натянутой струны (рис. 1), которая деформирована изображенным на рисунке образом, и сообщим этой форме деформации скорость, равную скорости распространения волны в струне. Эта деформация будет перемещаться по струне с постоянной скоростью как жесткое тело, нисколько не изменяя со временем своей конфигурации. Такое явление в сплошных средах получило название солитона, или уединенной волны. Оно наблюдается в средах без дисперсии, в которых скорость распространения синусоидальной волны не зависит от ее длины, а также и в средах с дисперсией при наличии определенного вида нелинейностей. В физике солитоны рассматриваются как модельное воплощение корпускулярно-волнового дуализма: с одной стороны, это, безусловно, волна, с другой стороны, неизменность конфигурации приводит к ассоциации с частицей.

Если бы на движение среды с ускорением относительно инерциального пространства (в случае струны — это движение струны вдоль нее самой) солитон реагировал ускоренным движением относительно среды, но в обратную сторону (как это имеет место в случае свободной материальной точки, если ее движение наблюдать в неинерциальной системе координат), то сходство солитона с частицей было бы уже не чисто внешним, а имело гораздо более глубокие основания.

Подобные явления имеют место в реальности и позволяют говорить об инертных свойствах волн. Мы будем рассматривать их на примере стоячих волн в упругой среде.

Основным объектом анализа в настоящей книге является тонкое упругое кольцо, имеющее возможность совершать изгибные колебания в своей плоскости. Оказывается, волны в этом кольце обладают инерциальными свойствами. Представим себе, что в нем возбуждены стоячие волны, соответствующие колебаниям по первой основной форме (рис. 2). И пусть после этого тело кольца приведено во вращение относительно инерциального пространства с некоторой зависящей от времени угловой скоростью $\omega(t)$. Возникает вопрос: как на это движение кольца будет реагировать стоячая волна? Если бы мы имели дело с твердым телом, закрепленным на основании без трения вдоль некоторой оси, проходящей через центр масс этого тела, то на подобное вращение основа-



Рис. 1

ния рассматриваемое тело, оставаясь неподвижным относительно инерциального пространства, реагировало бы поворотом относительно основания на угол

$$\varphi(t) = - \int \omega(t) dt. \quad (1)$$

Такое поведение тела прямо связано с его инертными свойствами, между тем как с поворотом стоячей волны перенос материи никак не связан, поэтому и ответ на поставленный выше вопрос далеко не очевиден. Для ответа на него требуется обратиться к уравнениям динамики кольца. Эти уравнения в предположении нерастяжимости срединной линии кольца будут выведены в главе I в виде

$$\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\omega(t)\dot{w}' + 2\dot{\omega}(t)w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2 \times (w^{IV} + 3w'') = 0. \quad (2)$$

Если обозначить через $\varphi(t)$ угол, который определяет положение осей стоячей волны относительно основания, то уравнение (2) определяет оператор

$$\varphi(t) = P[\omega(t)], \quad (3)$$

который и требуется получить в явной форме. По внешнему виду уравнения (2) про этот оператор трудно что-либо сказать, начиная с того, существует ли он вообще: ведь стоячая волна в кольце, возбужденная в нем пока вращения не было, при появлении вращения может просто разрушиться. Если же волна не разрушается и оператор (3) существует, то остается неясным, является ли он линейным: в уравнении (2) имеются члены с произведением $\omega(t)$ на w .

Чтобы найти оператор, следует вначале решить для уравнения (2) начальную задачу Коши: граничные условия — это условия периодичности, начальные условия соответствуют стоячей волне, эволюцию которой мы и хотим проследить.

Будем искать решение этого уравнения в виде суперпозиции функций следующего типа:

$$w = z(t, k) \exp\{i[k\varphi + \alpha(t, k)]\}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

каждая из которых есть частное решение уравнения (2). Здесь $z(t, k)$ — подлежащая определению комплексная функция, k —

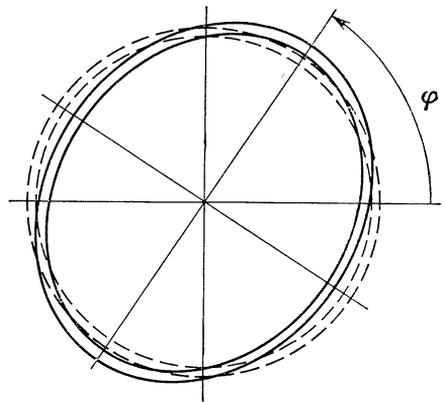


Рис. 2

номер формы колебаний (для формы, изображенной на рис. 2, $k = 2$), $\alpha(t, k)$ — вещественная функция, также подлежащая определению.

Решение (4) содержит избыточные переменные. В самом деле, $z(t, k) \exp[i\alpha(t, k)] = y(t, k)$ — также некоторая комплексная функция. Потребуем, чтобы (4) характеризовало стоячую волну в некоторой вращающейся системе координат (если, конечно, такая существует), т. е. в этой системе координат радиусы, на которых расположены узлы и максимумы (минимумы) волн, должны не перемещаться.

Выполним подстановку решения (4) в уравнение (2). Последовательно находим:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (\dot{z} + i\dot{\alpha}z) e^{i(k\varphi + \alpha)}; & \ddot{w} &= (\ddot{z} + 2i\dot{z}\dot{\alpha} + iz\ddot{\alpha} - z\dot{\alpha}^2) e^{i(k\varphi + \alpha)}; \\ (k^2 + 1)\dot{z} + i[-2(k^2 + 1)\dot{\alpha} + 4k\omega]z + \{i[-(k^2 + 1)\ddot{\alpha} + & \\ + 2k\dot{\omega}] - k^2(k^2 - 1)^2 + \omega^2 k^2(k^2 - 3) - (k^2 + 1)\dot{z}^2 - 4k\dot{\alpha}\dot{z}\} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для того чтобы решение (4) определяло стоячую волну во вращающейся системе координат, необходимо и достаточно обращения в нуль коэффициентов при мнимых частях в уравнении (5). Тогда это уравнение будет иметь форму, при которой в решении возможны стоячие волны:

$$-2(k^2 + 1)\dot{\alpha} + 4k\omega = 0, \quad -(k^2 + 1)\ddot{\alpha} + 2k\dot{\omega} = 0. \quad (6)$$

Получены два соотношения, определяющие единственную функцию $\alpha(t, k)$. Нетрудно видеть, что переопределенная система (6) совместна, оба уравнения удовлетворяются одним решением:

$$\alpha(t, k) = \frac{2k}{k^2 + 1} \int \omega(t) dt. \quad (7)$$

Условие, определяющее положение пучности, находится из (4) в виде $k\varphi + \alpha(t, k) = 0$. Подставляя сюда (7), получим

$$\varphi(t) = -\frac{2}{k^2 + 1} \int \omega(t) dt. \quad (8)$$

Это и есть искомый оператор (3). Он представляет собой линейный интегральный оператор, отличающийся от оператора (1) для инертного тела лишь коэффициентом $2/(k^2 + 1)$ перед интегралом.

Таким образом, стоячие волны в упругом кольце могут служить датчиком инерциальной информации, как и инертное твердое тело:

$$\int \omega(t) dt = -\frac{k^2 + 1}{2} \varphi(t). \quad (9)$$

Этот результат является точным и получен для уравнения с переменными коэффициентами, так как $\omega(t)$ считается произвольной функцией. Этот факт и характеризует то яркое физическое свойство, которое можно называть свойством инертности упругих волн в кольце. Совместность уравнений переопределенной системы (6),

приведшая к существованию оператора (8), является следствием сразу двух обстоятельств: линейные относительно ω и $\dot{\omega}$ члены в уравнении (2) определяют силы, имеющие обобщенный потенциал, и все уравнение допускает группу сдвига по независимой переменной φ . Невыполнение одного из условий приводит к отсутствию эффекта.

Для целей инерциальной навигации (определение произвольного углового движения объекта относительно инерциального пространства) необходимо иметь три упругих кольца, ориентированных по трем взаимно перпендикулярным осям. Информация об угловом положении объекта будет поступать в виде трех интегралов

$$\int \omega_j(t) dt = -\frac{k^2 + 1}{2} \varphi_j(t) \quad j = 1, 2, 3,$$

что соответствует информации о положении объекта в квазикоординатах, т. е. совершенно так же, как и в случае лазерных гироскопов. Соответствующей является и логика обработки этой информации. В связи с этим для датчика информации об угловом движении объекта мы приняли термин «волновой твердотельный гироскоп».

Следует отметить, что коэффициент $2/(k^2 + 1)$ в формуле (8) зависит от номера формы колебаний. При возбуждении сразу нескольких форм возникает несколько независимых каналов дублирующей друг друга информации.

Для определения закона колебаний при заданной форме следует подставить (7) в (5), что дает уравнение для $z(t, k)$:

$$\ddot{z} + \frac{k^2(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2} (k^2 + 1 + \omega^2) z = 0. \quad (10)$$

Вся нестационарность исходного уравнения (2) вошла в уравнение (10). Для многих частных и важных для практики случаев зависимости ω от времени уравнение (10) решается точно, и тем самым мы вообще можем получить точное общее решение уравнения (2). Например, случаи монотонного убывания и монотонного возрастания $\omega(t)$ можно рассматривать при помощи уравнения Эйри в функциях Эйри. Если $\omega(t)$ — гармоническая функция времени, то получается уравнение Матье, что также позволяет провести исчерпывающий точный анализ. В случае произвольной зависимости $\omega(t)$ можно воспользоваться теоремами качественного анализа, а также строить приближенные решения методом усреднения. Все эти вопросы являются предметом рассмотрения в главе III. В этой же главе рассмотрена динамика растяжимого кольца. Учет растяжимости приводит к уточнению коэффициента $2/(k^2 + 1)$ в интегральном операторе (8), а также к установлению качественно нового факта. В растяжимом кольце наряду с изгибными колебаниями существуют связанные с ними колебания растяжений. В отличие от нерастяжимого кольца каждой форме колебаний соответствует две собственных частоты колебаний (одна из них стремится к бесконечности при стремлении параметра растяжимости к нулю). Упомянутый новый факт состоит в том, что

стоячие волны, соответствующие меньшим частотам (изгибные формы), определяются оператором (8) со слегка уточненным коэффициентом, в то время как стоячие волны, соответствующие большим частотам (формы растяжения), определяются оператором (8) с противоположным знаком. Иными словами, при появлении вращения кольца изгибные волны бегут по кольцу в обратную сторону, волны растяжения — в сторону вращения кольца. Абсолютные значения скоростей при этом одинаковы.

Рассмотренные в этой же главе нелинейные эффекты позволяют оценить влияние амплитуды колебаний на искажение основного оператора (8). Явление захвата, характерное для лазерных гироскопов, в упругом кольце не обнаружено.

В пятом параграфе главы III рассматривается упругая оболочка — полусферический резонатор. Для нее выписываются уравнения в форме В. В. Новожилова и решается вопрос о построении оператора, аналогичного оператору (8) для упругого кольца. Установлена точная структура такого оператора, чем показано, что и упругие волны в полусферическом резонаторе также обладают инертными свойствами в определенном выше смысле.

Имеющаяся аналогия между кольцевым и полусферическим резонатором позволяет многие факты теории кольцевого резонатора распространить на полусферический, поэтому в главе IV рассматривается лишь кольцевой резонатор. Предполагается, что все результаты, установленные для кольца, справедливы с некоторой точностью и для полусферы.

Глава IV посвящена изучению различных обстоятельств, отличающих реальное кольцо от рассмотренного в предыдущей главе идеального случая. Так, установлено, что диссипация, вызванная внутренним трением (учитываемая в рамках модели вязкоупругого тела Кельвина—Фойхта), никак не влияет на основной оператор. В этом радикальное отличие волны как датчика инерциальной информации от твердого тела. Вязкое трение увлекает тело за основанием, в то время как на положении стоячей волны оно никак не сказывается. Волна лишь уменьшается со временем по амплитуде по экспоненциальному закону. В этом волна обладает серьезным преимуществом перед инертным телом.

Однако наличие затухания приводит к необходимости поддерживать колебания внешними силами. Рассматриваются две схемы возбуждения электрическими силами: позиционное, когда напряжение между резонатором и внешними электродами изменяется по закону $u = u_0 \cos 2\varphi \cos \lambda t$, и параметрическое, когда напряжение не зависит от угла $u = u_0 \cos \lambda t$.

Первый тип возбуждения обладает тем достоинством, что колебания резонатора возникают при любой, даже и сколь угодно малой амплитуде напряжения u_0 . От величины напряжения будет зависеть лишь величина амплитуды установившихся колебаний. Однако это возбуждение «привязывает» стоячую волну к основанию, строго ориентируя ее по «осям» напряжения. При таком возбуждении кольцо может использоваться как датчик угловой скорости

объекта. Оно превращается в этом режиме в разновидность вибрационного гироскопа. Однако основной эффект, определяющий принципиальную особенность волнового твердотельного гироскопа, не сохраняется. Оператор (8) не существует, поскольку в этом случае система не инвариантна по отношению к группе сдвига по углу φ .

Второй тип возбуждения обладает нужной инвариантностью, он сохраняет основной эффект и точный вид оператора (8). Однако, как и любое параметрическое возбуждение, это возбуждение обладает особенностью: существует порог u_0^{\min} , такой, что если напряжение $u_0 < u_0^{\min}$, то колебания резонатора не возбуждаются, если же $u_0 > u_0^{\min}$, то возбуждаются неустойчивые колебания. Этот тип возбуждения можно использовать, лишь вводя обратную связь по амплитуде колебаний, обеспечивающей $u_0 = u_0^{\min}$. Все вопросы, связанные с динамикой кольца при наличии указанных типов возбуждения (параметры стационарных режимов, их устойчивость и т. п.), изучаются в главе IV. В ней же рассмотрены некоторые инструментальные погрешности — влияние некруглости электрода и некруглости самого резонатора на положение стоячей волны. Показано, что и то и другое приводит к изменению положения стоячей волны, что может интерпретироваться как «уход» этого типа гироскопа. Некруглость резонатора приводит, кроме того, и к тому, что в кольце оказываются возможными лишь две стоячие волны заданной формы (для $k = 2$ их оси расположены под углом 45° друг к другу), строго определенно ориентированные по отношению к кольцу. Частоты колебаний этих волн при этом не совпадают. Некруглость резонатора, а также и любой другой дефект изготовления (переменность толщины, неоднородность материала и пр.), имеющий в разложении по углу φ вторую гармонику, приводят к основному для волнового твердотельного гироскопа типу ухода. Сопровождающее этот вид дефекта расщепление частоты колебаний по основной форме на невращающемся основании может использоваться в качестве информации о дефекте с целью его устранения.

Основным главам III и IV предшествуют две вспомогательные. В главе I рассматривается вывод основных дифференциальных уравнений кольца. При выводе приходится учитывать следующие факторы. Во-первых, наличие угловой скорости приводит к появлению предварительного натяжения кольца, что меняет линейную часть оператора упругости. Действительно, обычно при выводе линейных уравнений членами, содержащими произведение деформации на нагрузку, пренебрегают. Однако для нерастяжимого кольца нагрузка не обращается в нуль при обращении в нуль деформации (примером как раз и являются центробежные силы). Поэтому приходится учитывать произведения деформации на предварительное натяжение. Во-вторых, при рассмотрении вращения кольца с произвольной угловой скоростью возникает вопрос о том, под действием каких сил кольцо вращается с уско-

рением и не влияют ли эти силы на изгибные колебания. Наиболее ясным ответ на этот вопрос оказывается при применении для вывода уравнений метода Лагранжа. При этом вращение кольца рассматривается в виде некоторой нестационарной связи. Эффект такой связи полностью учитывается при составлении плотности кинетической энергии кольца, а те силы, которые вызывают ускоренное вращение, являются реакцией связей, исключаемой в процедуре Лагранжа. При желании их можно вычислить отдельно обычным для методов теоретической механики способом. Уравнения, получаемые методом Лагранжа, оказываются совпадающими с уравнениями, полученными методом сил в предположении, что силы, вызывающие ускоренное движение кольца, не учитываются совсем. Кажущееся противоречие легко объясняется тем, что эти силы не зависят от деформаций кольца или от положения точки на кольце, а поскольку в уравнениях присутствуют лишь производные этих сил по углу φ , то при таком дифференцировании они исчезают.

В главе II излагаются основные положения метода приближенного интегрирования уравнений, используемого в книге, — метода усреднения. В сжатой форме (за счет пренебрежения второстепенными обстоятельствами) рассматриваются важнейшие аспекты метода: типы стандартных форм, приведение к ним, процедуры усреднения, построение высших приближений, явление резонанса, вопросы обоснования. Рассматривается разновидность метода усреднения — метод двух масштабов. Все изложение иллюстрируется примерами.

Вопросы, связанные с изучением влияния вращения на упругие колебания оболочек и колец, уже рассматривались [16, 17]. Однако в них скорость вращения считается постоянной, а основной эффект вращения проявляется в изменении спектра частот собственных колебаний.

Предпринятое в предлагаемой книге изучение случая переменной угловой скорости (осуществленное, по-видимому, впервые) позволило установить качественно новое явление, имеющее смысл лишь для переменной угловой скорости, — эффект инертности волнового поля.

На этом основано и принципиальное отличие различных типов вибрационных гироскопов от рассматриваемого в этой книге, для которого предложено, как сказано ранее, подчеркивающее это отличие название — волновой твердотельный гироскоп. Слово «волновой» указывает на тот факт, что используется не просто амплитуда колебаний (вибраций), а свойства волн в целом. Слово «твердотельный» подчеркивает факт, что волны возникают в упругом теле в отличие от волн электромагнитного характера, используемых в лазерных гироскопах.

Мы надеемся, что предлагаемая книга будет полезной не только для специалистов в области гироскопических приборов и инерциальных систем навигации, но и для лиц, интересующихся проблемами динамики упругих систем.

Глава I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

1

Вывод уравнений кольцевого резонатора методом сил

Рассмотрим кольцо, осевая линия которого в недеформированном состоянии представляет собой окружность. Предположим, что поперечное сечение, проведенное перпендикулярно осевой линии, не зависит от места сечения и обладает осью симметрии, лежащей в плоскости осевой линии. При деформировании кольца считается, что деформированная осевая линия остается в плоскости, определяемой окружностью недеформированного состояния.

Предлагаемая теория основана на том, что любое плоское нормальное к осевой линии сечение и после деформации остается плоским и нормальным к продольным волокнам кольца. При изгибе поперечные сечения mn и $m'n'$ поворачиваются относительно друг друга вокруг оси, перпендикулярной плоскости изгиба (рис. 3), так что волокна на одной стороне испытывают растяжение, на другой — сжатие. Пунктирная линия на рис. 3 есть след пересечения боковой грани с нейтральным слоем, на котором волокна не изменяют длины при изгибе. Линия пересечения нейтрального сечения с каким-либо поперечным сечением называется нейтральной осью. Осевая линия представляет собой пересечение нейтрального слоя и плоскости осевой линии.

Возьмем отрезок $S'p'$, длина которого в недеформированном состоянии равна $(R' + l) \Delta\varphi$, где R' — радиус кривизны осевой линии в недеформированном состоянии. В результате изгиба центр кривизны O' перемещается в точку O'' , сечение mn поворачивается относительно сечения $m'n'$ на дополнительный угол $\delta\Delta\varphi$, отрезок $S'p'$ превращается в отрезок $S''p''$ длины $(R'' + l) (\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi)$. Таким образом, волокно $S'S''$ испытывает относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{(R'' + l) (\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi) - (R' + l) \Delta\varphi}{(R' + l) \Delta\varphi}.$$

Для тонкостенных колец $R' \gg l$, поэтому, принимая во внимание условие нерастяжимости отрезка aa' $R' \Delta\varphi = R'' (\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi)$ и пренебрегая малыми членами, получаем, что

$$\varepsilon = l \delta\Delta\varphi / R' \Delta\varphi.$$

Последнее равенство переписывается в виде

$$\varepsilon = \Delta k l, \tag{1.4}$$

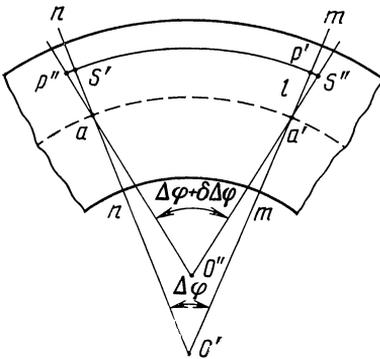


Рис. 3

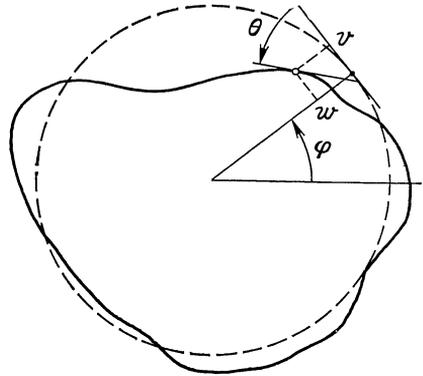


Рис. 4

где $\Delta k = \delta \Delta \varphi / R' \Delta \varphi = -1/R' + 1/R''$ представляет собой изменение кривизны кольца.

По деформациям продольных волокон на основании закона Гука определяются соответствующие напряжения

$$\sigma = \Delta k E l, \quad (1.2)$$

где E — модуль упругости, положительное направление l выбирается в направлении увеличения радиуса, напряжение растяжения считается положительным.

Обозначим элементарную площадку, расположенную на расстоянии l от нейтральной оси, через ΔS . На нее действует элементарная сила $\Delta K E l \Delta S$. Момент этих сил относительно нейтральной оси выражается формулой

$$M = -\Delta k E \int l^2 dS = -\Delta k E I. \quad (1.3)$$

Здесь I — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

На рис. 4 показано положение оси кольца в деформированном состоянии. В процессе деформации сечение недеформированного кольца, определяемое углом φ , переместилось в направлении центра кольца на величину w и в направлении касательной на величину v . При этом касательная к осевой линии в рассматриваемом сечении повернулась на угол θ . Переменные v, w, θ , рассматриваемые как функции времени и угла φ , характеризуют форму кольца в деформированном состоянии.

Введенные переменные связаны между собой рядом соотношений. В силу неизменности длины осевой линии длины малых

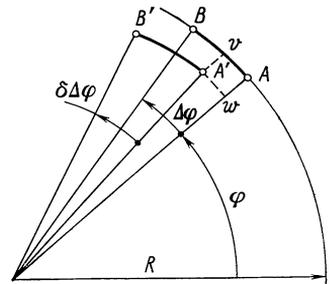


Рис. 5

отрезков AB и $A'B'$ (рис. 5) равны, т. е.

$$R\Delta\varphi = (R - w) (\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi).$$

Из рис. 5 видно, что изменение угла $\delta\Delta\varphi$ связано с различием перемещений точек A и B в касательном направлении, поэтому

$$\delta\Delta\varphi = \frac{\partial v}{\partial\varphi} \Delta\varphi/R.$$

Из полученных соотношений, переходя к пределу при $\Delta\varphi \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi} = w. \quad (1.4)$$

В свою очередь угол поворота касательной θ связан с переменными v и w . Здесь для вывода геометрических соотношений между малыми величинами θ , v , w используется линейная теория, поэтому мы можем воспользоваться принципом суперпозиции.

Одна составляющая поворота касательной θ_1 связана с перемещением сечения на величину v (рис. 6), она вычисляется по формуле

$$\theta_1 = v/R.$$

Другая составляющая поворота касательной θ_2 связана с различием перемещений концов малого отрезка длины $R\Delta\varphi$ в радиальном направлении. Она вычисляется (рис. 7) по формуле

$$\theta_2 = \frac{\partial w}{\partial\varphi} \Delta\varphi/R\Delta\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial\varphi}.$$

Складывая составляющие θ_1 и θ_2 , получаем суммарный угол поворота касательной

$$\theta = \frac{1}{R} \left(v + \frac{\partial w}{\partial\varphi} \right). \quad (1.5)$$

Так как приращение кривизны, связанное с упругим перемещением, имеет вид

$$\Delta k = \frac{\partial\theta}{R\partial\varphi}, \quad (1.6)$$

то формула (1.3) с учетом соотношений (1.4) и (1.5) переписывается так:

$$M = - \frac{EI}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} \right). \quad (1.7)$$

Для вывода уравнений движения кольца воспользуемся принципом Даламбера. Вырежем двумя близкими радиальными сечениями элемент кольца (рис. 8) и рассмотрим его равновесие при наличии внешних и массовых сил.

Напряжения в правом сечении приводятся к силам N , Q и моменту M , в левом сечении — к $N + \Delta N$, $Q + \Delta Q$ и $M + \Delta M$. Обозначим проекции удельных сил на направления касательной

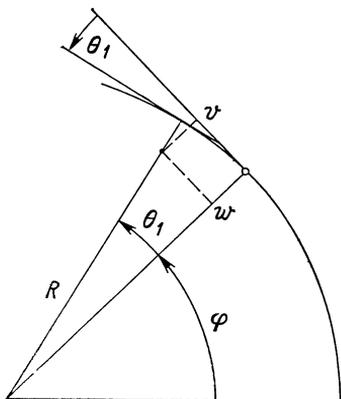


Рис. 6

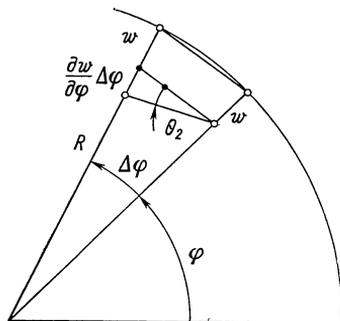


Рис. 7

и радиуса через p и q и напишем уравнение равновесия сил в проекции на направление касательной:

$$pR\Delta\varphi - N \cos \theta + Q \sin \theta + (N + \Delta N) \cos (\theta + \Delta\theta + \Delta\varphi) - (Q + \Delta Q) \sin (\theta + \Delta\theta + \Delta\varphi) = 0, \quad (1.8)$$

откуда, считая θ и $\Delta\theta$ малыми и переходя к пределу при $\Delta\varphi \rightarrow 0$, получаем линейное уравнение вида

$$pR + \frac{\partial N}{\partial \varphi} - Q = 0. \quad (1.9)$$

Аналогично, проектируя силы на направление радиуса, находим

$$qR\Delta\varphi - Q \cos \theta - N \sin \theta + (N + \Delta N) \sin (\theta + \Delta\theta + \Delta\varphi) + (Q + \Delta Q) \cos (\theta + \Delta\theta + \Delta\varphi) = 0, \quad (1.10)$$

откуда при $\Delta\varphi \rightarrow 0$ выводится второе линейное уравнение равновесия

$$qR + N + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.11)$$

Из условия равновесия моментов имеем третье уравнение равновесия

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} - QR = 0. \quad (1.12)$$

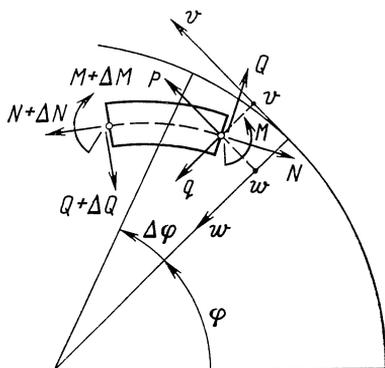


Рис. 8

Обозначим угловую скорость, с которой вращается кольцо в своей плоскости, через $\Omega(t)$. Тогда проекции удельных сил на направления касательной и радиуса записываются в следующей форме:

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \rho S \ddot{v} + 2\rho S \Omega \dot{w} + \rho S \Omega^2 v - \rho S \dot{\Omega} (R - w), \\ q &= q_0 - \rho S \ddot{w} - 2\rho S \Omega \dot{v} - \rho S (R - w) \Omega^2 - \rho S \dot{\Omega} v. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь p_0, q_0 — проекции удельных внешних сил (сила на единицу длины кольца), ρ — плотность материала кольца, S — площадь поперечного сечения, точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Дифференцируя уравнение (1.11) по φ и вычитая из него уравнение (1.9), находим, что

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + Q + \left(\frac{\partial q}{\partial \varphi} - p \right) R = 0. \quad (1.14)$$

Сила Q с учетом соотношений (1.7) и (1.2) преобразуется к следующему виду:

$$Q = -\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right). \quad (1.15)$$

Дифференцируя уравнение (1.14) по φ и исключая из него Q и v посредством соотношений (1.15) и (1.4), получаем уравнение в частных производных для переменной w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \varphi^2} - \dot{w} + 4\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} + 2\dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \kappa^2 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \\ = \frac{1}{\rho S} \left(\frac{\partial^2 q_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} \right); \quad \kappa^2 = EI/\rho S R^4. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В уравнении (1.16) опущены члены, содержащие множитель Ω^2 , и в тех случаях, когда угловая скорость вращения мала, это уравнение может использоваться для анализа динамики кольца. Если же учет центробежных сил необходим, то сделать это, используя полные выражения для удельных сил (1.13), в рамках только что приведенного вывода, нельзя. Дело заключается в том, что центробежная сила содержит не зависящую ни от каких переменных (v, w и их производных) составляющую $\rho S R \Omega^2$ (постоянная по этим переменным составляющая). При составлении уравнений равновесия элемента кольца (1.9), (1.11) и (1.12) мы пренебрегли всевозможными нелинейными членами типа квадратов переменных и сил и их произведений. Однако произведение постоянной силы на любую из переменных есть линейный член по этой переменной, и в рамках линейной модели он должен быть удержан. Все то же можно сказать и про постоянную составляющую внешней удельной нагрузки.

Таким образом, уравнение (1.16) верно для тех случаев, когда внешняя нагрузка не содержит постоянной составляющей (в частности, когда можно пренебречь центробежными силами).

Для построения уравнений с учетом постоянных составляющих силы уточним уравнения равновесия.

Переходя в уравнениях (1.8) и (1.10) к пределу $\Delta\varphi \rightarrow 0$ и сохраняя произведения растягивающей силы N на переменные, получим вместо (1.9), (1.11) и (1.12) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - Q - N_0\theta + pR &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + N + N_0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + qR &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} - QR &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь N — постоянная составляющая растягивающего усилия, обусловленная постоянной составляющей внешней нагрузки. В случае центробежной силы и постоянной составляющей нагрузки q_0 , обозначаемой q_{00} ,

$$N = \rho SR^2 \Omega^2 - Rq_{00}. \quad (1.18)$$

Подставляя выражение (1.18) в систему (1.17) и выполняя, как и ранее, требуемые преобразования, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 Q}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \rho SR \Omega^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) - \\ - q_{00} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + R \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Подставляя в уравнение (1.19) выражения для q и p в виде (1.13), из которых уже исключена постоянная составляющая как q_{00} , так и $\rho SR \Omega^2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \varphi^2} - \dot{w} + 4\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} + 2\dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \kappa^2 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \\ - \Omega^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 3 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{\rho S} \left(\frac{\partial^2 q_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{q_{00}}{\rho SR} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнения динамики кольца при отказе от предположения о нерастяжимости средней линии. Уравнения равновесия (1.17) должны быть дополнены соотношениями (1.3), (1.5) и (1.6). Однако, поскольку условие нерастяжимости (1.4) теперь не выполняется, оно должно быть заменено условием

$$N = (SE/R) (v' - w). \quad (1.20)$$

Оно выражает собой закон Гука, так как $(v' - w)/R$ — относительное удлинение средней линии.

Выделяя, как и раньше, постоянные составляющие из N , q_0 и w ($N \rightarrow N_0 + N$; $w \rightarrow w_0 + w$; $q_0 \rightarrow q_{00} + q_0$) и исключая из указанной системы уравнений переменные N , Q , M , θ , получим уравнения для переменных v , w в виде

$$\begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega \dot{w} + \dot{\Omega} (R - w) - \Omega^2 v - \delta^2 (v'' - w') - \kappa^2 (w''' + v'') = \\ = \frac{p_0}{\rho S} + \frac{q_{00}}{\rho SR} (w' + v), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v - \Omega^2w - \delta^2(v' - w) + \kappa^2(w^{IV} + v''') = \\ = \frac{q_0}{\rho S} - \frac{q_{00}}{\rho SR}(w'' + v'). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь введено новое обозначение

$$\delta^2 = \frac{E}{\rho R^2}. \quad (1.22)$$

Штрихами здесь и везде дальше для сокращения записи будем обозначать дифференцирование по φ : $w' = \partial w / \partial \varphi$. В уравнениях (1.21) в постоянную составляющую нагрузки q_{00} включена и постоянная составляющая центробежной силы. В случае свободного кольца $p_0 = q_0 = 0$, $q_{00} = -\rho SR\Omega^2$ и уравнения (1.21) приобретают вид

$$\begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + \dot{\Omega}(R - w) - \delta^2(v'' - w') - \kappa^2(w'''' + v''') + \\ + \Omega^2w' = 0, \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v - \Omega^2w - \delta^2(v' - w) + \kappa^2(w^{IV} + v''') - \\ - \Omega^2(w'' + v') = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Введем безразмерное время $\tau = \kappa t$ и безразмерную угловую скорость $\omega = \Omega/\kappa$. Уравнения (1.23) в этих обозначениях запишутся в форме

$$\begin{aligned} \ddot{v} - 2\omega\dot{w} + \dot{\omega}(R - w) - \delta_0^2(v'' - w') - w'''' - v'' + \\ + \omega^2w' = 0, \\ \ddot{w} + 2\omega\dot{v} + \dot{\omega}v - \omega^2w - \delta_0^2(v' - w) + w^{IV} + v''' - \omega^2(w'' + v') = 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $\delta_0^2 = SR^2/I$. Если поперечное сечение кольца представляет собой прямоугольник со стороной длины h в направлении радиуса, то $\delta_0^2 = 12 R^2/h^2$. Для тонких колец, которые рассматриваются нами, отношение $h/R \ll 1$. В процессе вывода уравнений члены $(h/R)^2$ считались малыми по сравнению с единицей. Присутствие членов с множителем $(h/R)^2$ в уравнениях (1.24) не противоречит модели тонкого кольца, поскольку их следует сравнивать с другими членами уравнений, а пренебрежение ими уже связано с качественным изменением модели (в частности, с вырождением размерности). Для того чтобы осуществить предельный переход при $\delta_0^2 \rightarrow \infty$, продифференцируем один раз по φ первое уравнение системы (1.24), два раза — второе уравнение и вычтем после этого из второго уравнения первое. В результате получаем

$$\begin{aligned} \ddot{w}' - \ddot{v}' + 2\omega(\dot{v}'' + \dot{w}') + \dot{\omega}(v'' + w') - \omega^2(w^{IV} + v''' + 2w'') + \\ + w^{IV} + w^{VI} + v^V + v''' = 0, \quad (1.25) \\ \ddot{w} + 2\omega\dot{v} + \dot{\omega}v - \omega^2(w'' + w + v') + w^{IV} + v''' = \delta_0^2(v' - w). \end{aligned}$$

Система уравнений (1.25) при $\delta_0^2 \rightarrow \infty$ является сингулярно возмущенной. Ее асимптотическое интегральное многообразие пред-

ставляет собой условие нерастяжимости $v' - w = 0$, а дифференциальные уравнения на этом многообразии совпадают с уравнениями нерастяжимого кольца:

$$\ddot{w} - \dot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0. \quad (1.26)$$

2

Вывод уравнений кольцевого резонатора методом Лагранжа

Многие вопросы при составлении уравнений кольца методом Лагранжа решаются совершенно формально, что в ряде случаев дает большие преимущества лагранжеву формализму перед методом сил. Так, достаточно просто решается вопрос о том, какие же силы приводят к вращению кольца с ускорением $\dot{\Omega}(t)$ и как их следует учитывать в уравнениях движения кольца. Эти силы представляют собой реакцию соответствующей нестационарной связи, которая и исключается процедурой Лагранжа. Столь же просто решается и вопрос об учете постоянных составляющих сил, в частности центробежных сил: если линеаризацию производить после использования принципа Гамильтона, то все эффекты таких сил учтутся автоматически.

Для составления уравнений Лагранжа необходимо вычислить плотность кинетической энергии кольца, плотность потенциальной энергии и выписать уравнение связи. Уравнение связи в виде (1.4) уже не годится, поскольку оно представляет собой линеаризованное уравнение, а в методе Лагранжа линеаризация осуществляется после составления уравнений. Напишем точное уравнение связи в локальной форме — условие нерастяжимости любого бесконечно малого отрезка средней линии.

Длина малого отрезка осевой линии в недеформированном состоянии вычисляется по формуле $(\Delta s)^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$,

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & y &= R \sin \varphi, & x_1 &= R \cos (\varphi + \Delta\varphi), \\ y_1 &= R \sin (\varphi + \Delta\varphi), \end{aligned}$$

откуда для малых углов $\Delta\varphi$ имеем

$$(\Delta s)^2 = R^2 (\Delta\varphi)^2. \quad (2.1)$$

Длина того же отрезка в деформированном состоянии вычисляется по формуле

$$(\bar{\Delta} s)^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2,$$

$$\bar{x} = R \cos \varphi - v \sin \varphi - w \cos \varphi,$$

$$\bar{y} = R \sin \varphi + v \cos \varphi - w \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= R \cos (\varphi + \Delta\varphi) - (v + \Delta v) \sin (\varphi + \Delta\varphi) - (w + \\ &+ \Delta w) \cos (\varphi + \Delta\varphi), \end{aligned}$$

$$y_1 = R \sin(\varphi + \Delta\varphi) + (v + \Delta v) \cos(\varphi + \Delta\varphi) - (w + \Delta w) \sin(\varphi + \Delta\varphi),$$

откуда находим, что

$$(\overline{\Delta s})^2 = [(R + v' - w)^2 + (v + w)^2] (\Delta\varphi)^2. \quad (2.2)$$

Приравнивая длины отрезков, определяемые формулами (2.1) и (2.2), получаем условие нерастяжимости в следующей локальной форме:

$$(R + v' - w)^2 + (v + w')^2 = R^2. \quad (2.3)$$

Линеаризация этого уравнения приводит к условию (1.4), однако, как уже упоминалось, линеаризацию следует производить после получения уравнений Лагранжа. Плотность кинетической и потенциальной энергий кольца

$$T = \frac{1}{2} \rho SR [(\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2],$$

$$П = (EI/2R) (\theta')^2.$$

Плотность лагранжиана с учетом соотношения (1.5) выражается формулой

$$L = \frac{1}{2} \{[(\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2] - \kappa^2 (w'' + v'')^2\}, \quad (2.4)$$

$$\kappa^2 = EI/\rho SR^4.$$

Рассматривая переменные v и w в качестве обобщенных координат с наложенной связью (2.3), воспользуемся для вывода уравнений движения принципом Гамильтона [2]: интеграл с фиксированными пределами

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} [L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w'') + \lambda(t, \varphi) f(v, w, v', w'')] dt d\varphi,$$

в котором λ — неопределенный множитель Лагранжа, $f(v, w, v', w'')$ — уравнение связи (2.3), должен принимать минимальное значение.

Для минимальности действия по Гамильтону вариация интеграла должна равняться нулю:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \right. \\ \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} \delta v + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + \lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \delta v' + \lambda \frac{\partial f}{\partial w''} \delta w'' \right] d\varphi dt = 0.$$

Преобразуем члены, содержащие вариации производных по времени или углу, обычным образом — интегрированием по частям. Таким образом находим, например, что

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' d\varphi dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w''} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\delta w'] d\varphi dt = \left[\frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \right]_{(\varphi_1, t_1)}^{(\varphi_2, t_2)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\partial L}{\partial w''} \right] \delta w' d\varphi dt = \left[\frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \right]_{(\varphi_1, t_1)}^{(\varphi_2, t_2)} - \\
& - \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w \right]_{(\varphi_1, t_1)}^{(\varphi_2, t_2)} + \int_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w d\varphi dt = \\
& = \int_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w d\varphi dt,
\end{aligned}$$

так как вариации в фиксированных точках (φ_1, t_1) и (φ_2, t_2) равны нулю.

Подберем теперь множитель $\lambda(t, \varphi)$ так, чтобы выражение, имеющее сомножитель δv , обращалось в нуль. Тогда совокупность членов, имеющих сомножителем вариацию δw , равна нулю ввиду произвола независимой вариации δw . В результате мы получаем уравнения Лагранжа для упругого кольца:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) - \lambda \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{\partial L}{\partial w} + \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) - \lambda \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

$$2f = (R + v' - w)^2 + (v + w')^2 - R^2 = 0.$$

Подставляя сюда функцию Лагранжа (2.4), записываем уравнения движения упругого кольца в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \Omega^2 v - \kappa^2(w''' + v'') + \\
+ \frac{d}{d\varphi} [\lambda(R + v' - w)] - \lambda(w' + v) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + (R - w)\Omega^2 + \kappa^2(w^{IV} + v''') + \\
+ \frac{d}{d\varphi} [\lambda(v + w')] + \lambda(R + v' - w) = 0.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.6) в совокупности с уравнением связи (2.3) полностью описывает движение идеального упругого кольца. Однако основные свойства движения кольца достаточно полно описываются линейными уравнениями. Для их вывода представим множитель Лагранжа в виде $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, где λ_0 не зависит от v и w , а $\lambda_1 \rightarrow 0$ при $v, w \rightarrow 0$. Полагая v и w равными нулю во втором уравнении системы (2.6), находим $\lambda_0 = -\Omega^2$, после чего, линеаризуя уравнения (2.6) и уравнение связи (2.3), имеем

$$\begin{aligned}
\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \kappa^2(w^{III} + v^{II}) + R\lambda_1 + \Omega^2 w' = 0, \\
\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v - 2\Omega^2 w + \kappa^2(w^{IV} + v^{III}) + \lambda_1 R - \Omega^2 w'' = 0, \\
v' = w.
\end{aligned}$$

Исключим отсюда λ_1 и v . Для этого продифференцируем второе уравнение по φ и вычтем из первого уравнения. Полученное уравнение, в которое уже не входит λ_1 , продифференцируем еще раз по φ и исключим переменную v с помощью соотношения $w = v'$, в которое превращается связь (2.3) после ее линейризации. В результате имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' + \kappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') - \Omega^2 (w^{\text{IV}} + 3w'') = 0.$$

Вводя безразмерное время $\tau = \kappa t$ и безразмерную угловую скорость $\omega = \Omega/\kappa$, получаем уравнение, которое будет решаться в дальнейшем:

$$\dot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'' - \omega^2 (w^{\text{IV}} + 3w'') = 0. \quad (2.7)$$

В нем Ω считается заданной функцией времени. Соответственно ω является заданной функцией безразмерного времени τ .

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

3

Одночастотные системы

В настоящей книге для решения задач динамики волнового твердотельного гироскопа широко используется метод осреднения. Он относится к так называемым локальным методам анализа решений дифференциальных уравнений. Далее приводятся основные положения метода осреднения.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(t, z_1, \dots, z_n) + \varepsilon F_i(t, z_1, \dots, z_n, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n).$

Введем следующие матрицы-столбцы:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (3.1) переписывается в форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) + \varepsilon \mathbf{F}(t, \mathbf{z}).$$

Входящая в функции \mathbf{f} и \mathbf{F} переменная \mathbf{z} указывает на тот факт, что эти функции зависят от совокупности переменных z_1, \dots, \dots, z_n ; скалярный параметр ε считается малым и неотрицательным.

Предположим, что вырожденная система, в которую превращается исходная система (3.1) при $\varepsilon = 0$, имеет точное решение

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(t, \mathbf{C}). \quad (3.2)$$

В нем \mathbf{C} — совокупность n произвольных постоянных интегрирования. Следовательно, для функции $\mathbf{g}(t, \mathbf{C})$ имеет место следующее тождество:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(t, \mathbf{C}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(t, \mathbf{C}) \equiv \mathbf{f}[t, \mathbf{g}(t, \mathbf{C})]. \quad (3.3)$$

Наша задача заключается в построении с гарантированной точностью решения системы уравнений (3.1) с учетом информации о решении вырожденной системы.

Для решения поставленной задачи методом осреднения нужно привести исходную систему к специальному виду, называемому стандартной формой. Такое приведение осуществляется заменой переменных $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$ по формуле

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Дифференцируя соотношение (3.4), получаем

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|.$$

Подставляя полученные соотношения в систему уравнений (3.1) и разрешая ее относительно $d\mathbf{x}/dt$, имеем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{f}[t, \mathbf{G}(t, \mathbf{x})] - \frac{\partial \mathbf{G}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{F}[t, \mathbf{G}(t, \mathbf{x}), \varepsilon] \right\}. \quad (3.5)$$

Из полученного выражения видно, что если $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$, то в силу тождества (3.3) уравнение (3.5) упрощается и записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \left[\frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \mathbf{F}[t, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \varepsilon], \quad (3.6)$$

кроме этого, как видно из полученной системы уравнений, новые переменные \mathbf{x} медленно меняются с течением времени и данное уравнение, которое обычно записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3.7)$$

носит название стандартной формы одночастотной системы. Смысл термина «одночастотная» будет объяснен в дальнейшем.

Особенностью системы (3.7) является присутствие множителя ε перед всей правой частью. Заметим, что к виду (3.7) могут быть приведены любые системы вида (3.1), если только общее решение вырожденной системы известно. Метод приведения носит название метода вариации произвольных постоянных Лагранжа. Заметим также, что к стандартной форме приводит и любая замена вида

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{q}(t, \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$ — произвольная дифференцируемая функция, которую можно выбирать с целью преобразования правой части

$X(t, x, \varepsilon)$, чтобы получить систему (3.7) в виде, более удобном для исследования.

Пример. Возьмем осциллятор с кубическим демпфированием, уравнение которого имеет вид

$$\ddot{z} + \varepsilon \dot{z}^3 + z = 0.$$

Это уравнение легко переписывается в форме (3.4)

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (z_1 \equiv z), \quad \dot{z}_2 = -\varepsilon z_2^3 - z_1. \quad (3.8)$$

Решение вырожденной ($\varepsilon = 0$) системы

$$z_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$z_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

определяет замену переменных $(z_1, z_2) \rightarrow (x_1, x_2)$:

$$z_1 = x_1 \cos t + x_2 \sin t,$$

$$z_2 = -x_1 \sin t + x_2 \cos t.$$

Подставляя эти формулы в систему уравнений (3.8), получаем

$$\dot{x}_1 \cos t + \dot{x}_2 \sin t = 0,$$

$$-\dot{x}_1 \sin t + \dot{x}_2 \cos t = -\varepsilon (-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3, \quad (3.9)$$

откуда находим, что

$$\dot{x}_1 = \varepsilon (-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3 \sin t,$$

$$\dot{x}_2 = -\varepsilon (-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3 \cos t. \quad (3.10)$$

Это и есть уравнение осциллятора в стандартной форме. Заметим, что исходное уравнение второго порядка можно не приводить к промежуточной системе уравнений первого порядка (3.8), используя замену

$$z = x_1 \cos t + x_2 \sin t.$$

Однако при этом необходимо взять в качестве дополнительного условия первое уравнение из (3.9).

Приведение к стандартной форме — это первый необходимый этап применения метода осреднения.

Второй этап состоит в замене точной системы (3.7) некоторой приближенной системой уравнений. Эта замена должна удовлетворять двум условиям: гарантировать близость соответствующих решений точной и приближенной систем уравнений и приближенная система должна легко поддаваться математическому анализу.

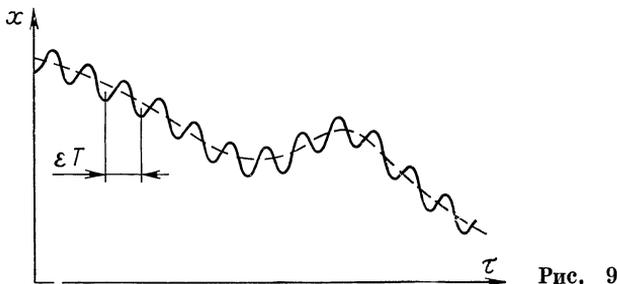
То упрощение системы, которое производится в методе осреднения, базируется на следующей идее разделения движений. Пусть правая часть системы (3.7) периодична по t с периодом T :

$$X(t + T, x, \varepsilon) \equiv X(t, x, \varepsilon).$$

Это предположение представляет собой конкретизацию системы, если периодичность по t не имеется, то будем полагать $T = \infty$. Произведем в системе (3.7) замену времени $t \rightarrow \tau$ по формуле $\tau = \varepsilon t$. Тогда система переписывается в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right). \quad (3.14)$$

Правая часть этой системы также периодична по τ с периодом εT , т. е. в нее входят периодические функции по τ , изменяющиеся с большой частотой. Типичный вид какого-нибудь частного решения этой системы изображен на рис. 9.



Это решение может быть представлено в виде суммы плавно меняющейся части $u(\tau)$, называемой эволюцией системы и быстроосциллирующей части $v(\tau)$, называемой осцилляцией:

$$x(\tau) = u(\tau) + v(\tau).$$

Это не слишком определенное утверждение уточняется, если под эволюцией понимать результат действия на $x(\tau)$ оператора сглаживания:

$$u(\tau) = \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{\varepsilon T} x(\tau + \xi) d\xi.$$

Для нас наибольший интерес представляет эволюция системы, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{\varepsilon T} \frac{dx(\tau + \xi)}{d\tau} d\xi = \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{\varepsilon T} X\left[\frac{\tau + \xi}{\varepsilon}, x(\tau + \xi), \varepsilon\right] d\xi.$$

Мы получили точное соотношение. При интегрировании по переменной ξ необходимо учитывать не только явную зависимость функции X от ξ , но и неявную зависимость от x . Однако интервал интегрирования мал и на нем x мало изменяется. Полагая $x(\tau + \xi) \simeq u(\tau)$, имеем

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{\varepsilon T} X\left(\frac{\tau + \xi}{\varepsilon}, u, \varepsilon\right) d\xi = \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{\varepsilon T} X\left(\frac{\xi}{\varepsilon}, u, \varepsilon\right) d\xi.$$

Или, возвращаясь к исходному времени t , получаем

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\mathbf{u}, \varepsilon), \quad (3.12)$$

где $\mathbf{X}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(t, \mathbf{u}, \varepsilon) dt$, если \mathbf{X} является периодической функцией;

$\mathbf{X}_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(t, \mathbf{u}, \varepsilon) dt$, если \mathbf{X} не является периодической функцией.

В этом и заключается основной прием метода осреднения — переход от точного уравнения (3.7) к уравнению (3.12) посредством осреднения правой части по явно входящему времени t .

Важно заметить, что метод осреднения — это не метод приближенного решения исходных уравнений (3.1) или (3.7), а метод приведения их к более удобному для анализа виду (3.12).

Пример. Продолжим рассмотрение уравнений осциллятора с кубическим демпфированием (3.8), которые были приведены к стандартной форме (3.10). Осреднение уравнений по явно входящему времени приводит к следующим уравнениям для эволюции:

$$\dot{u}_1 = -\frac{3}{8} \varepsilon u_1 (u_1^2 + u_2^2), \quad \dot{u}_2 = -\frac{3}{8} \varepsilon u_2 (u_1^2 + u_2^2). \quad (3.13)$$

Уравнения (3.13), приближенно заменяющие уравнения (3.10), и представляют собой конечную цель первого приближения метода осреднения.

Как уравнения (3.10), так и уравнения (3.13) являются нелинейными. Однако правые части уравнений (3.13) не зависят явно от времени. Кроме того, они допускают точное интегрирование, а это обстоятельство не является следствием специального вида исходной системы, а представляет собой общий факт, справедливый для любых нелинейных автономных систем второго порядка.

В нашем случае уравнения (3.13) легко интегрируются после перехода к полярным координатам

$$u_1 = r \cos \varphi, \quad u_2 = r \sin \varphi, \quad (3.14)$$

в которых они приобретают вид

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{3}{8} \varepsilon r^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

В результате интегрирования получаем, что

$$r = r_0 / \sqrt{1 + \frac{3}{8} \varepsilon r_0^2 t}, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Последний, третий этап всей процедуры состоит в возвращении к исходным переменным в силу формул (3.14), (3.8) дает нам решение для z в явном виде:

$$z = z_1 = r_0 \cos(t - \varphi_0) / \sqrt{1 + \frac{3}{8} \varepsilon r_0^2 t}. \quad (3.15)$$

Это и есть приближенное общее решение задачи об осцилляторе с кубическим демпфированием. Приближение состоит в том, что мы отождествили переменные (x_1, x_2) , удовлетворяющие точным уравнениям (3.10) с переменными (u_1, u_2) , удовлетворяющими приближенным уравнениям (3.13).

4

Математические основы метода осреднения

Приведенные в предыдущем параграфе рассуждения, основанные на введении понятия эволюции при помощи оператора сглаживания, оправдывают рассмотренную приближенную процедуру, но не обосновывают ее. Между тем потребность в обосновании диктуется не только стремлением к формально-математической завершенности решения. При невыполнении строгих условий применимости метода могут возникать погрешности, грубо искажающие наше представление о существе исследуемого явления. В рассмотренном выше примере осциллятора с кубическим демпфированием полученное приближенное решение (3.15) правильно описывает характер затухания колебаний в системе, если $\varepsilon > 0$. Если же перед параметром ε в уравнении осциллятора стоит знак минус, то решение (3.15) в этом случае принимает вид

$$z = r_0 \cos(t - \varphi_0) / \sqrt{1 - \sqrt[3]{\varepsilon} r_0 t}.$$

Оно уходит за конечное время в бесконечность, что ни качественно, ни количественно не соответствует действительности.

Приводимые ниже теоремы устанавливают четкие границы применимости метода осреднения и позволяют избежать подобных неприятностей.

Основной результат теории составляет теорема Н. Н. Боголюбова, которую мы сформулируем, следуя работе [15].

Будут сравниваться две начальные задачи Коши:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \text{II} \\ \dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), & \dot{u} = \varepsilon X_0(u, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, & u(0) = x_0. \end{array}$$

На систему I, правая часть которой определена в некоторой области D изменения переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и для $0 \leq t < \infty$, накладываются следующие условия:

а) $X(t, x)$ — измеримая по t функция при любом фиксированном x (в частности, кусочно-непрерывная функция, множество точек разрыва которой не имеет точек сгущения);

б) $\|X(t, x)\| \leq M (\|X\| = \sqrt{\sum_i X_i^2})$ для любого x из D

и $0 \leq t < \infty$;

в) $\|X(t, x) - X(t, x')\| \leq \lambda \|x - x'\|$ для любых x, x' из D и $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$;

з) предел $X_0(u, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, u, \varepsilon) dt$ существует равно-

мерно относительно u из D и $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Условие в) выполняется всегда, если функция $X(t, x)$ дифференцируема по x в области D . Если эта функция периодична по t , то в условии г) предел всегда существует, однако проверка его требуется и в этом случае, так как он может быть неравномерным.

Теорема 1. Если решение $u(t)$ начальной задачи Коши для системы II определено для $0 \leq t < \infty$ и принадлежит области D вместе со своей ρ -окрестностью, то для любого наперед заданного числа L можно найти ε_0 , такое, что

$$\|x(t) - u(t)\| \leq 2L \sqrt{2\lambda M} e^{\lambda L} \sqrt{\delta(\varepsilon)} \quad (4.1)$$

при всех $0 \leq t < (L/\varepsilon)$ и $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\text{где } \delta(\varepsilon) = \sup_{0 < h \leq L} \left[\sup_{x \in D} \left\| \varepsilon \int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} [X(t, x, \varepsilon) - X_0(x, \varepsilon)] dt \right\| \right] \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если $X(t, x)$ — периодическая функция времени с периодом T , то оценка (4.1) может быть улучшена:

$$\|x(t) - u(t)\| \leq 2TM(L\lambda + 1)e^{\lambda L\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Полное доказательство теоремы дано в [15].

Рассмотрим применение сформулированной теоремы. В примере с осциллятором с кубическим демпфированием

$$\begin{aligned} X(t, x, \varepsilon) = \{X_1; X_2\} = \{ & (-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3 \sin t; \\ & -(-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3 \cos t \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решение осредненной системы (3.13) с начальными условиями $u_1(0) = 0,1$; $u_2(0) = 0$ имеет вид

$$u_1 = 0,1/\sqrt{1 + {}^3/_{80}t}, \quad u_2 = 0. \quad (4.4)$$

Область D , в которой определена система (3.10) и которая фигурирует в теореме, совпадает со всей плоскостью $\{x_1, x_2\}$. Однако при построении оценок точности для их улучшения следует брать область D как можно меньшей. Достаточно, например, взять лишь ρ -окрестность решения (4.4). Такая область изображена на рис. 10. Все условия теоремы в области выполнены, следует только подсчитать константы M и λ , фигурирующие в оценке (4.2). Имеем

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = |(-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^3| \leq \\ &\leq \sqrt{[(0,1 + \rho)^2 + \rho^2]^3} = M, \\ \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)^2} = \\ &= 3(-x_1 \sin t + x_2 \cos t)^2 \leq 3[(0,1 + \rho)^2 + \rho^2] = \lambda. \end{aligned}$$

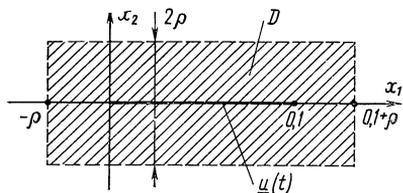


Рис. 10

Подставляя выражения для M и λ в соотношение (4.2), получаем

$$\|x(t) - u(t)\| \leq \leq 4\pi \sqrt{[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2]^3} \times \times \{3L[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2] + + 1\} e^{3L[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2]_{\varepsilon_0}}.$$

Такая оценка будет верна, если $x(t)$ на рассматриваемом интервале времени $[0, L/\varepsilon]$ лежит в области D . То максимальное значение ε , при котором это можно гарантировать, и есть фигурирующее в теореме ε_0 . Очевидно, оно может быть найдено из уравнения

$$4\pi \sqrt{[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2]^3} \{3L[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2] + 1\} \times \times e^{3L[(0, 1 + \rho)^2 + \rho^2]_{\varepsilon_0}} = \rho. \quad (4.5)$$

Пусть нам задан параметр $\varepsilon = 0,01$ и интервал времени, на котором рассматривается решение $0 \leq t \leq 10^4$. Тогда число $L = 10^2$. Из соотношения (4.5) получаем, что $\varepsilon_0 = 0,99\dots \rho + 0$ ($\rho^2 \simeq \rho$). Следовательно, при вычислениях M и λ достаточно брать $\rho = = 0,01$. Это дает нам $M \simeq 10^{-3}$, $\lambda \simeq 3 \cdot 10^{-2}$. Подставляя их в оценку (4.2), получаем $\|x(t) - u(t)\| \leq 0,01$ для $0 \leq t \leq 10^4$.

В случае, когда имеется отрицательное кубическое демпфирование, решение $u(t)$ не ограничено. Неограниченной оказывается и область D . В неограниченной области правые части (3.10) также не ограничены, т. е. теорема 1 оказывается неприменимой, так как $M = \infty$, $\lambda = \infty$.

Если рассматриваемое решение осредненной системы асимптотически устойчиво, то оценки типа (4.1), (4.2) оказываются справедливыми на бесконечном интервале времени. Этот факт был установлен К. Банфи [14]. Отметим, что такой случай и имеет место в рассмотренном нами примере.

Теорема Н. Н. Боголюбова позволяет обосновать получаемые в настоящей книге результаты по волновому твердотельному гирроскопу. Значение малого параметра ε , равного отношению угловой скорости вращения основания к частоте собственных колебаний резонатора, равно $10^{-4} - 10^{-5}$, что обеспечивает высокую точность приближенных результатов.

Нам придется изучать не только начальную задачу Коши, но и стационарные режимы в системах вида (3.7). В этом случае приходится сравнивать не частные решения точной и осредненной систем с одинаковыми начальными условиями, а стационарные решения в этих системах, которые, вообще говоря, удовлетворяют различным начальным условиям. Соответствие между такими решениями устанавливает теорема 2 [1].

Теорема 2

Имеются системы I и II:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \quad \dot{u} = \varepsilon X_0(u, \varepsilon).$$

Пусть T — период функции $X(t, x, \varepsilon)$ по t , не зависящей от ε , и

$$X_0(u, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, u, \varepsilon) dt.$$

Пусть $u_0 = \text{const}$ — стационарное решение системы II, т. е. $X_0(u_0, \varepsilon) = 0$, для которого матрица $\partial X_0 / \partial u$ невырождена. Тогда для всех достаточно малых ε у системы I существует периодическое решение с периодом T , которое при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к u_0 . Если, кроме того, собственные числа λ этой матрицы, определяемые характеристическим уравнением

$$\det \left| \frac{\partial X_0}{\partial u}(u_0) - \lambda E \right| = 0,$$

имеют отрицательные вещественные части (стационарное решение системы II асимптотически устойчиво), то это периодическое решение системы I асимптотически устойчиво.

Для справедливости теоремы требуется существование непрерывных частных производных первого порядка по x у функции $X(t, x, \varepsilon)$ в окрестности точки $x = u_0$, а также непрерывность этой функции по ε и ее непрерывность (достаточно и измеримости) по t . Таким образом, теорема 2 позволяет из существования и устойчивости стационарного режима в осредненной системе (что, как правило, представляет собой достаточно простую задачу) выводить существование и устойчивость периодического режима в точной системе.

При изучении колебательных процессов в сплошных средах приходится иметь дело с уравнениями в частных производных. Пример — объект, рассматриваемый в настоящей книге. В некоторых случаях задачу удастся свести к уравнениям (3.7) и приведенные две теоремы оказываются достаточными для целей обоснования приближенного математического анализа. В более общем случае задача сводится к матричному уравнению (3.7), имеющему бесконечное число компонент \dot{y} векторов x и X :

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \quad X = (X_1, \dots, X_n, \dots).$$

Оказывается [6], что если во всех условиях теоремы 1 под нормой понимать выражение

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2},$$

то теорема остается справедливой и в этом случае. При этом требуется проверять сходимость написанных рядов. Например, если найдено решение осредненной системы $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t), \dots)$, то перед применением теоремы 1 требуется убедиться в сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t).$$

Построение высших приближений

Точность, с которой получается решение при помощи описанного в предыдущих параграфах метода, обычно бывает достаточно высокой. И все-таки при переходе к осредненной системе исходные дифференциальные уравнения теряют часть свойств, которые могут представлять предмет самостоятельного интереса. Тем самым возникает вопрос о том, нельзя ли как-то уточнить полученную осредненную систему. В идейном плане такая задача решается весьма просто. Перепишем основную систему (3.7) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{X}(t, x, \varepsilon), \quad (5.1)$$

где $X_0(x, \varepsilon)$, как и раньше, — среднее по времени от функции $X(t, x, \varepsilon)$, а $\tilde{X}(t, x, \varepsilon)$ — функция, дающая в сумме с $X_0(x, \varepsilon)$ исходную правую часть $X(t, x, \varepsilon)$, т. е. $X(t, x, \varepsilon) = X_0(x, \varepsilon) + \tilde{X}(t, x, \varepsilon)$.

Переход к осредненной системе от системы (5.1) соответствует, таким образом, отбрасыванию члена $\varepsilon \tilde{X}(t, x, \varepsilon)$, что и приводит в решении к погрешности типа (4.2). Если бы уравнение (5.1) имело вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x, \varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{X}(t, x, \varepsilon), \quad (5.2)$$

то отбрасывание при усреднении члена $\varepsilon^2 \tilde{X}(t, x, \varepsilon)$ привело бы к тому, что в формуле для оценки (4.2) вместо ε стояло ε^2 . Оценка была бы верна на том же интервале времени $[0, L/\varepsilon]$.

Таким образом, для того чтобы усреднение давало на порядок более высокую точность, достаточно исходную систему (5.1) преобразовать к виду (5.2). Для целей такого преобразования выполняется близкая к тождественной замена переменных

$$x = y + \varepsilon S(t, y, \varepsilon). \quad (5.3)$$

Функцию $S(t, y, \varepsilon)$ следует выбрать так, чтобы удовлетворить требуемому условию.

Дифференцируя соотношение (5.3) с учетом уравнения (5.1), получаем

$$\frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y + \varepsilon S, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{X}(t, y + \varepsilon S, \varepsilon).$$

Разрешая эту систему относительно производной dy/dt и представляя правую часть в виде ряда по степеням ε , находим

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, \varepsilon) + \varepsilon \left[\tilde{X}(t, y, \varepsilon) - \frac{\partial S}{\partial t} \right] + \varepsilon^2 Q(t, y, \varepsilon). \quad (5.4)$$

Совокупность получившихся в системе после преобразования слагаемых второго порядка по ε и выше обозначена через $\varepsilon^2 Q(t, y, \varepsilon)$.

Для того чтобы обеспечить требуемое условие, как это видно из (5.4), достаточно $S(t, y, \varepsilon)$ выбрать так, чтобы

$$\widetilde{X}(t, y, \varepsilon) - \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0,$$

откуда

$$S(t, y, \varepsilon) = \int_0^t \widetilde{X}(\tau, y, \varepsilon) d\tau + C(y, \varepsilon), \quad (5.5)$$

где $C(y, \varepsilon)$ — произвольная постоянная интегрирования.

Таким образом, исходная точная система (5.1) при помощи замены переменных посредством формул (5.3), (5.5) приводится к системе

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, \varepsilon) + \varepsilon^2 Q(t, y, \varepsilon). \quad (5.6)$$

Применяя к (5.6) процедуру осреднения, получим осредненную систему в виде

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, \varepsilon) + \varepsilon^2 X_1(y, \varepsilon), \quad (5.7)$$

где

$$X_1(y, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(t, y, \varepsilon) dt.$$

Решение уравнения (5.7) после подстановки в замену (5.3) дает решение исходной системы (5.1) в периодическом случае с оценкой вида

$$\|x(t) - u(t)\| \leq B\varepsilon^2, \quad t \in [0, L/\varepsilon].$$

Константа B должна вычисляться по правым частям системы (5.6).

Для построения произвольного приближения можно воспользоваться методом индукции. Пусть система уже приведена к виду, в котором отбрасываемые при осреднении члены имеют порядок ε^n :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x, \varepsilon) + \varepsilon^2 X_1(x, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n X_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} \widetilde{X}(t, x, \varepsilon). \quad (5.8)$$

Требуется заменой переменной

$$x = y + \varepsilon^n S(t, y, \varepsilon) \quad (5.9)$$

привести систему (5.8) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, \varepsilon) + \varepsilon^2 X_1(y, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n X_n(y, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} Q(t, y, \varepsilon). \quad (5.10)$$

Повторяя все приведенные выкладки, найдем, что функция $S(t, y, \varepsilon)$ выражается той же формулой (5.6). Осредненное урав-

нение, соответствующее (5.10), имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y, \varepsilon) + \varepsilon^2 X_1(y, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+1} X_{n+1}(y, \varepsilon),$$

$$X_{n+1}(y, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(t, y, \varepsilon) dt. \quad (5.11)$$

Решение этого уравнения после подстановки в формулу замены (5.9) дает приближенное решение уравнения (5.8), удовлетворяющее оценке

$$\|x(t) - u(t)\| \leq B\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq L/\varepsilon.$$

6

Многочастотные системы. Резонанс

Стандартная форма многочастотной системы получается формальным обобщением стандартной формы одночастотной системы (3.7) в случае периодической правой части. Это обобщение производится следующим образом. Система (3.7) может быть переписана после введения дополнительной переменной $\varphi = \omega t$ в автономной форме

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\varphi, x, \varepsilon). \quad (6.1)$$

Здесь φ — скалярная переменная, изменяющаяся с частотой ω . Такая форма записи и определяет смысл введенного ранее понятия одночастотной системы для уравнений (6.1).

Стандартная форма многочастотной системы отличается от системы (6.1) тем, что φ , как и x , уже представляет собой векторную переменную $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Размерности вектора φ и вектора x никак не связаны. Кроме того, допускается малая неравномерность в изменении векторной переменной φ . В результате общий вид стандартной формы многочастотной системы оказывается следующим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon \Phi(\varphi, x, \varepsilon),$$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\varphi, x, \varepsilon). \quad (6.2)$$

По всем φ функции $\Phi(\varphi, x, \varepsilon)$ и $X(\varphi, x, \varepsilon)$ периодичны с периодом 2π . В этой форме допускается также зависимость вектора частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ от медленной переменной x , т. е. $\omega = \omega(x)$.

К виду (6.2) могут быть приведены уравнения многих типов колебательных систем. Рассмотрим пример квазилинейной коле-

батальной системы:

$$A\ddot{y} + By = \varepsilon f(t, y, \dot{y}), \quad (6.3)$$

$y = (y_1, \dots, y_n)$, A и B — симметрические матрицы, причем A положительно определена, функция f периодична по t .

Линейной заменой переменных в системе (6.3) можно привести матрицу A к единичной, а матрицу B к диагональной форме (приведение к нормальным координатам). Будем считать, что такое приведение уже выполнено: $A = E$, $B = \text{diag} \{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}$. Систему (6.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= z_k, \\ \dot{z}_k &= -\omega_k^2 y_k + \varepsilon f_k(t, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Выполним в (6.4) замену переменных $(y_k, z_k) \rightarrow (\varphi_k, x_k)$ по формулам

$$y_k = x_k \sin \varphi_k, \quad z_k = x_k \omega_k \cos \varphi_k. \quad (6.5)$$

В новых переменных система (6.4) принимает форму

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k &= \omega_k - \frac{\varepsilon}{x_k \omega_k} f_k(t, x_1 \sin \varphi_1, \dots, x_n \sin \varphi_n, x_1 \omega_1 \cos \varphi_1, \dots) \sin \varphi_k, \\ \dot{x}_k &= \varepsilon \frac{1}{\omega_k} f_k(\dots) \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Обозначим период правых частей по t через $2\pi/\omega_{n+1}$ и введем вместо t переменную $\varphi_{n+1} = \omega_{n+1}t$, по которой функции f_k 2π -периодичны. Введем также обозначения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_k} f_k(t, x_1 \sin \varphi_1, \dots, x_1 \omega_1 \cos \varphi_1, \dots) \cos \varphi_k &\equiv \\ &\equiv X_k(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_1, \dots, x_n), \\ - \frac{1}{x_k \omega_k} f_k(\dots) \sin \varphi_k &\equiv \Phi_k(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x_1, \dots, x_n), \quad m = n + 1. \end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнения (6.6) принимают вид стандартной формы (6.2).

Замечание 1. Для квазилинейной системы вектор частот ω оказался постоянным, не зависящим от медленных переменных. Независимость ω от x является признаком квазилинейности исходной системы (6.3). Случай, в котором ω зависит от x , называется существенно нелинейным, он нами в дальнейшем рассматриваться не будет.

Замечание 2. В системе (6.4) заменой переменных

$(y_k, z_k) \rightarrow (p_k, q_k)$ по формулам

$$\begin{aligned} y_k &= p_k \cos \omega_k t + q_k \sin \omega_k t, \quad z_k = -p_k \omega_k \sin \omega_k t + \\ &+ q_k \omega_k \cos \omega_k t \end{aligned}$$

можно было перейти к стандартной форме одночастотной системы, поскольку использованный в параграфе 3 метод вариации произ-

вольных постоянных применим и здесь. Это говорит о том, что понятия «одночастотная» и «многочастотная» носят в известной мере условный характер. Любую систему с очевидной «физической» многочастотностью можно записать в математически одночастотной форме. Однако форма записи (6.2) обладает целым рядом преимуществ, в особенности при изучении резонансных явлений, как это будет показано далее.

Процедура осреднения для многочастотных систем состоит в переходе от системы (6.2) к приближенной системе

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon \Phi_0(x, \varepsilon), \\ \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X_0(x, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, \varepsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x, \varepsilon) d\varphi_1 \dots d\varphi_m, \\ X_0(x, \varepsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(\varphi_1, \dots, \varphi_m, x, \varepsilon) d\varphi_1 \dots d\varphi_m. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Функции $\Phi_0(x, \varepsilon)$ и $X_0(x, \varepsilon)$ представляют собой средние значения по всем переменным $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ от правых частей системы (6.2) и носят название пространственных средних.

Уравнения (6.7) значительно проще уравнений (6.2), поскольку уравнения для переменных x отделяются от уравнений для переменных φ . После интегрирования уравнений для x нахождение переменных φ сводится к квадратурам.

Обоснование точности решений, получаемых из системы (6.7), сводится к сформулированной выше для одночастотных систем теореме Н. Н. Боголюбова, если в системе (6.2) отсутствует резонанс. Если же резонанс имеет место, то переходить к уравнениям (6.7) при помощи формул (6.8) нельзя. Процедура осреднения в резонансном случае рассматривается ниже. Прежде всего необходимо дать определение резонанса и указать по каким признакам можно устанавливать его наличие в системе (6.2). Дадим для этой цели вспомогательное определение временного среднего функций Φ и X :

$$\begin{aligned} \Phi_0^*(x, \varepsilon, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\omega_1 t + \theta_1, \dots, \omega_m t + \theta_m, x, \varepsilon) dt, \\ X_0^*(x, \varepsilon, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\omega_1 t + \theta_1, \dots, \omega_m t + \theta_m, x, \varepsilon) dt. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Эти выражения представляют собой средние значения правых частей системы (6.2) по времени, вычисленные вдоль траектории

Число таких линейно независимых соотношений называется кратностью резонанса, а сумма модулей коэффициентов линейно независимых соотношений называется порядком резонанса. Очевидно, кратность (s) резонанса всегда строго меньше числа частот m .

Рассмотрим процедуру осреднения в системе (6.2) в резонансном случае. Под резонансным случаем понимается точное выполнение соотношений (6.12), при которых временные средние терпят разрыв, либо их выполнение с погрешностью порядка ε :

$$\Lambda \omega = \Lambda \sim \varepsilon, \quad (6.13)$$

где Λ — прямоугольная матрица коэффициентов системы (6.12). Векторная величина Λ , предполагаемая в случае резонанса малой, носит название расстройки. В произведении (6.13) ω понимается как матрица-столбец.

Без ограничения общности можно считать ранг матрицы Λ равным s и представить ее в блочной форме:

$$\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1).$$

Λ_1 — квадратная невырожденная матрица, содержащая последние s столбцов матрицы Λ , а Λ_0 дополняет матрицу Λ_1 до Λ .

Переменные $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ разобьем на две группы: $\varphi = (\psi, \gamma)$, где $\psi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-s})$, $\gamma = (\varphi_{m-s+1}, \dots, \varphi_m)$. В соответствии с этим $\Psi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{m-s})$, $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{m-s})$. Перед тем как произвести осреднение в системе (6.2), необходимо выполнить преобразование быстрых переменных $(\gamma_1, \dots, \gamma_s) \rightarrow (\theta_1, \dots, \theta_s)$:

$$\theta = \Lambda \varphi \quad (6.14)$$

В соответствии с введенными обозначениями (6.14) можно переписать в виде $\theta = \Lambda_0 \psi - \Lambda_1 \gamma$, откуда в силу невырожденности Λ_1 , $\gamma = \Lambda_1^{-1} (\theta - \Lambda_0 \psi)$. В новых переменных (6.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \Omega + \varepsilon \Psi [\psi, \Lambda_1^{-1} (\theta - \Lambda_0 \psi), x], \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Lambda + \varepsilon \Lambda \Phi [\psi, \Lambda_1^{-1} (\theta - \Lambda_0 \psi), x], \\ \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X [\psi, \Lambda_1^{-1} (\theta - \Lambda_0 \psi), x]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

В системе (6.15) переменные θ оказываются медленными, так как Λ — малая величина порядка ε . Тем самым число медленных переменных увеличивается на кратность резонанса s , число быстрых переменных уменьшается на s . В форме (6.15) система нерезонансная, и можно произвести осреднение по быстрым переменным ψ по формулам (6.8). Исследование резонансного случая приводит всегда к осредненным системам более высокого порядка.

Итак, построена процедура осреднения многочастотных систем в резонансном и нерезонансном случаях. Построение высших приближений в обоих случаях производится аналогично одноча-

стотному случаю. Следует заметить, что с увеличением порядка приближения обычно увеличивается и число различных резонансов. Так, в рассмотренном примере уравнения Матье в первом приближении обнаружился один резонанс $\nu = 1$. Матрица Λ в этом примере имеет вид $\Lambda = (2, -1)$.

Резонансный случай определяется условием

$$\Lambda \omega = (2, -1) \begin{pmatrix} \nu \\ 2 \end{pmatrix} = 2\nu - 2 = \Delta \sim \varepsilon.$$

Замена переменных (6.14) запишется в форме

$$\theta = \Lambda \varphi = 2\varphi_1 - \varphi_2,$$

после чего уравнения (6.15) для системы (6.11) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \nu - \varepsilon \nu \sin^2 \varphi_1 \cos(2\varphi_1 - \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Delta - 2\varepsilon \nu \sin^2 \varphi_1 \cos(2\varphi_1 - \theta), \\ \frac{dx}{dt} &= \varepsilon \nu x \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos(2\varphi_1 - \theta). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Осреднение этих уравнений по быстрой переменной φ_1 позволяет получить уравнения для медленных переменных в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Delta + \frac{\varepsilon \nu}{2} \cos \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\varepsilon \nu}{4} x \sin \theta. \end{aligned}$$

На границе области устойчивости уравнение Матье имеет периодическое решение, что соответствует стационарному режиму написанных уравнений:

$$\Delta + (\varepsilon \nu / 2) \cos \theta = 0, \quad (\varepsilon \nu / 4) x \sin \theta = 0,$$

откуда следует, что это возможно, если $\Delta = \pm (\varepsilon / 2) \nu$. Или, используя обозначение $\Delta = 2(\nu - 1)$, с точностью до ε^2 получаем, что $\nu = 1 \pm \varepsilon / 4$. Это и есть первое приближение для границ первой зоны неустойчивости уравнения Матье.

Рассмотрим теперь второе приближение для системы уравнений (6.11). Для этого в соответствии с общей процедурой следует в уравнениях (6.11) выполнить замену переменных $(\varphi_1, \varphi_2, x) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, y)$, уничтожающую в этих уравнениях переменные члены первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_1 + \varepsilon A(\alpha_1, \alpha_2, y), & \varphi_2 &= \alpha_2, \\ x &= y + \varepsilon B(\alpha_1, \alpha_2, y). \end{aligned}$$

Функции A и B подлежат определению. Подставляя эту замену в (6.11), находим

$$\dot{\alpha}_1 + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \dot{\alpha}_2 + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial y} \dot{y} = \nu - \varepsilon \nu \sin^2(\alpha_1 + \varepsilon A) \cos \alpha_2,$$

$$\dot{\alpha}_2 = 2,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} + \varepsilon \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \varepsilon \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} \dot{\alpha}_2 + \varepsilon \frac{\partial B}{\partial y} \dot{y} &= \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \nu (y + \varepsilon B) \sin 2(\alpha_1 + \varepsilon A) \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{\alpha}_1 \simeq \nu$, $\dot{\alpha}_2 = 2$, $\dot{y} \sim \varepsilon$, то условие уничтожения переменных (зависящих от быстрых переменных α_1 и α_2) членов сводится к следующим уравнениям для A и B :

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} &= -\nu \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \nu \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{2} \nu y \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Линейные относительно A и B уравнения с частными производными легко решаются [10]. Например, для нахождения A следует найти интеграл обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\alpha_1}{\nu} = \frac{d\alpha_2}{2} = \frac{dA}{-\nu \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_2}.$$

Имеем

$$\alpha_1 = \frac{\nu}{2} \alpha_2 + C.$$

Из уравнения, связывающего $d\alpha_2$ и dA , находим

$$A = -\frac{\nu}{2} \int \sin^2 \left(\frac{\nu}{2} \alpha_2 + C \right) \cos \alpha_2 d\alpha_2,$$

откуда

$$A = -\frac{\nu}{4} \sin \alpha_2 + \frac{\nu}{8} \left[\frac{\sin(\alpha_2 + 2\alpha_1)}{\nu + 1} + \frac{\sin(2\alpha_1 - \alpha_2)}{\nu - 1} \right].$$

Аналогично находим, что

$$B = -\frac{\nu y}{8} \left[\frac{\cos(2\alpha_1 + \alpha_2)}{\nu + 1} + \frac{\cos(2\alpha_1 - \alpha_2)}{\nu - 1} \right].$$

Указанное преобразование возможно, если $\nu \neq 1$. Поскольку мы намереваемся рассмотреть вторую зону неустойчивости (первая уже изучена), то $\nu \simeq 2$, и это условие выполнено. Если бы мы хотели строить второе приближение для первой зоны, то следовало преобразовывать не уравнения (6.11), а уравнения (6.16).

В результате указанной замены система уравнений (6.11) приводится к виду

$$\dot{\alpha}_1 = \nu - \varepsilon^2 \nu A \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$\dot{\alpha}_2 = 2,$$

$$\dot{y} = \varepsilon^2 \nu y \left(A \cos 2\alpha_1 \cos \alpha_2 + \frac{B}{2y} \sin 2\alpha_1 \cos \alpha_2 \right),$$

где переменная часть уже имеет порядок ε^2 .

Рассматривая резонанс $\nu - 2 = \Delta$ ($\Delta = (1, -1)$), выполним замену переменных (6.14):

$$\theta = \Lambda\varphi = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Подготовленные к осреднению уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{\alpha}_1 = \nu - \varepsilon^2 \dots$$

$$\dot{\theta} = \Delta - \frac{\varepsilon^2 \nu^2}{16} \left[\cos 2(2\alpha_1 - \theta) - \cos 2\theta + \frac{\sin^2(3\alpha_1 - \theta)}{\nu + 1} + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2(\alpha_1 + \theta)}{\nu - 1} + \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \cos 2(\alpha_1 - \theta) + \frac{1}{\nu^2 - 1} \cos 4\alpha_1 \right],$$

$$\dot{y} = \frac{\varepsilon^2 \nu^2 y}{16} \left[-\sin 2(2\alpha_1 - \theta) + \sin 2\theta + \frac{\sin 2(3\alpha_1 - \theta)}{4(\nu + 1)} + \right. \\ \left. + \frac{\sin 2(\alpha_1 + \theta)}{4(\nu - 1)} + \frac{\nu}{2(\nu^2 - 1)} \sin 4\alpha_1 - \frac{3}{2(\nu^2 - 1)} \sin 2(\alpha_1 - \theta) \right]$$

После осреднения по α_1 получаем уравнения для медленных переменных

$$\dot{\theta} = \Delta - \frac{\varepsilon^2 \nu^2}{16} \left[\frac{\nu}{\nu^2 - 1} - \cos 2\theta \right], \quad \dot{y} = \frac{\varepsilon^2 \nu^2 y}{16} \sin 2\theta.$$

Как и раньше, на границе устойчивости эта система должна иметь нетривиальное стационарное решение

$$\Delta - \frac{\varepsilon^2 \nu^2}{16} \left[\frac{\nu}{\nu^2 - 1} - \cos 2\theta \right] = 0, \quad \sin 2\theta = 0,$$

откуда

$$\Delta - \frac{\varepsilon^2 \nu^2}{16} \left[\frac{\nu}{\nu^2 - 1} \pm 1 \right] = 0.$$

Заменяя $\Delta = \nu - 2$ с точностью до величин порядка ε^3 , находим, что

$$\nu = 2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{2}{3} \pm 1 \right).$$

Это известное выражение для границ второй зоны неустойчивости уравнения Матье.

7

Метод осреднения для уравнений с частными производными

Алгоритм применения метода осреднения к уравнениям в частных производных, описывающим колебательные или волновые процессы в сплошных средах, состоит в предварительном приведении этих уравнений к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вид систем (3.7) или (6.2) с последующим применением всех ранее рассмотренных процедур.

Такое приведение осуществляется при помощи метода Фурье. Мы продемонстрируем его на примере задачи о колебаниях струны (рис. 11).

Предположим, что колебания струны описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \varepsilon F(\omega t, s, u) \quad (7.1)$$

с граничными условиями $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.

Определим переменную u в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \sin ks, \quad (7.2)$$

где y_k — неизвестные функции времени, подлежащие определению.

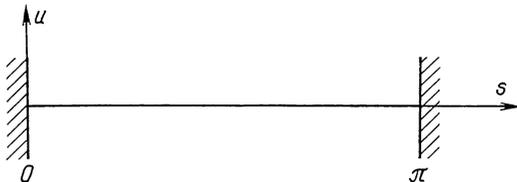


Рис. 11

Распределенную силу F также представим рядом Фурье по переменной s :

$$F[\omega t, s, \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin ks] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\omega t, y_1, \dots, y_i, \dots) \sin ks. \quad (7.3)$$

Подставляя формулы (7.2) и (7.3) в уравнение (7.1) и приравнявая коэффициенты при $\sin ks$, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y}_k + a^2 k^2 y_k = \varepsilon F_k(\omega t, y_1, \dots, y_i, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

Эта система отличается от квазилинейной системы (6.3) только тем, что она состоит из неограниченного числа уравнений. Для нее применимы все процедуры, которые применялись для системы уравнений (6.3).

8

Метод двух масштабов

Этот метод, нашедший широкое применение для уравнений в частных производных, идейно близок к методу осреднения, однако отличается от него по форме. Мы рассмотрим его на простых примерах. Разнообразные частные детали, неизбежно возникающие в общем случае, могут быть опущены. Важно уяснить центральную идею, после чего приспособление ее к той или иной конкретной задаче, как правило, не составляет большого труда.

В качестве первого примера рассмотрим уравнение линейного осциллятора с малым демпфированием

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = -\varepsilon \frac{dy}{dt}, \quad (8.1)$$

будем искать его решение в виде ряда

$$y = y_0(\theta, \tau) + \varepsilon y_1(\theta, \tau) + \varepsilon^2 y_2(\theta, \tau) + \dots \quad (8.2)$$

Здесь переменные θ и τ представляют собой «быстрое» и «медленное» время:

$$\theta = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots) t, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (8.3)$$

Неизвестные функции $y_k(\theta, \tau)$ и константы ω_k будем искать из условия отсутствия в y_k секулярных членов по переменным θ и τ .

Последовательно дифференцируя y по t , находим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y_0}{\partial \theta} + \varepsilon \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \left(\omega_2 \frac{\partial y_0}{\partial \theta} + \frac{\partial y_1}{\partial \tau} + \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta \partial \tau} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(2\omega_2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta \partial \tau} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial \theta^2} \right) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (8.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему уравнений для нахождения y_0, y_1, \dots :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} + y_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} + y_1 &= -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta \partial \tau} - \frac{\partial y_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial \theta^2} + y_2 &= -2\omega_2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta \partial \tau} - \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \frac{\partial y_0}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим, что

$$y_0 = A_0(\tau) \cos \theta + B_0(\tau) \sin \theta.$$

Так как рассматриваемое уравнение является уравнением в частных производных, в которые входят производные только по переменной θ , то произвольные постоянные A_0 и B_0 могут считаться зависящими от τ и будут определены в дальнейшем.

Подставляя во второе уравнение это решение, получаем

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} + y_1 = \left(2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0 \right) \sin \theta - \left(2 \frac{dB_0}{d\tau} + B_0 \right) \cos \theta. \quad (8.4)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1(\tau) \cos \theta + B_1(\tau) \sin \theta - \theta \left[\left(\frac{dB_0}{d\tau} + \frac{B_0}{2} \right) \sin \theta + \right. \\ &\left. + \left(\frac{dA_0}{d\tau} + \frac{A_0}{2} \right) \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Это решение является неограниченным по переменной θ .

Весь смысл введения двух масштабов времени заключается в том, чтобы, располагаясь имеющимся произволом, обеспечить отсутствие секулярных членов в $y_k(\theta, \tau)$ как по быстрой, так и по медленной переменным.

Из уравнения для y_1 видно, что для ограниченности $y_1(\theta, \tau)$ по θ необходимо и достаточно, чтобы в правой части уравнения (8.4) отсутствовали члены, пропорциональные $\cos \theta$ и $\sin \theta$. Это приводит к соотношениям

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -\frac{1}{2}A_0, \quad \frac{dB_0}{d\tau} = -\frac{1}{2}B_0,$$

из которых находятся $A_0(\tau)$ и $B_0(\tau)$:

$$A_0(\tau) = A_{00}e^{-\tau/2}, \quad B_0(\tau) = B_{00}e^{-\tau/2},$$

где A_{00}, B_{00} — произвольные постоянные.

В ряде (8.2) функция $y_0(\theta, \tau)$ оказывается полностью определенной:

$$y_0(\theta, \tau) = e^{-\tau/2} (A_{00} \cos \theta + B_{00} \sin \theta). \quad (8.6)$$

Или, возвращаясь к исходному времени t по формулам (8.3), получаем решение рассматриваемого уравнения (8.1) в первом приближении излагаемого метода:

$$y \simeq e^{-(\varepsilon/2)t} (A_{00} \cos t + B_{00} \sin t).$$

В первом приближении не возникает необходимости устранять секулярные члены по медленному времени τ , однако уже во втором приближении это требуется сделать. Для выяснения, как это происходит, обратимся к построению второго приближения. Подставляя функции (8.5) и (8.6) в уравнение для $y_2(\theta, \tau)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_2}{\partial \theta^2} + y_2 = & \left[\left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) A_{00} e^{-\tau/2} - 2 \frac{dB_1}{d\tau} - B_1 \right] \cos \theta + \\ & + \left[\left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) B_{00} e^{-\tau/2} + 2 \frac{dA_1}{d\tau} + A_1 \right] \sin \theta. \end{aligned}$$

Условие ограниченности $y_2(\theta, \tau)$ по θ , как и раньше, приводит к соотношениям вида

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{d\tau} = & -\frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2} \left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) A_{00} e^{-\tau/2}, \\ \frac{dA_1}{d\tau} = & -\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2} \left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) B_{00} e^{-\tau/2}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} B_1 = & B_{10} e^{-\tau/2} + \frac{\tau}{2} \left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) A_{00} e^{-\tau/2}, \\ A_1 = & A_{10} e^{-\tau/2} - \frac{\tau}{2} \left(2\omega_2 + \frac{1}{4} \right) B_{00} e^{-\tau/2}. \end{aligned}$$

Для того чтобы в этом решении исчезли секулярные члены по τ , необходимо и достаточно выбрать $\omega_2 = -1/8$. Итак, полностью построено второе приближение и решение исходной задачи приобретает вид

$$y \simeq e^{-(\varepsilon/2)t} \left[A \cos \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \right) t + B \sin \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \right) t \right].$$

Замечание. Требование отсутствия секулярных членов по θ является естественным, в противном случае мы получили бы ряд (8.2) с неограниченными коэффициентами и качество представления решения конечным отрезком такого ряда было бы неудовлетворительным. Менее естественным в рассмотренном примере может показаться требование отсутствия секулярных членов по τ , поскольку функция $\tau e^{-\tau}$ ограниченная и, казалось бы, нет большой нужды в ее устранении. Однако это не так. На интервале времени $\tau \in [0, 1]$ эта функция возрастает. Но этому интервалу времени по t соответствует асимптотически большой интервал времени по t : $t \in [0, 1/\varepsilon]$. А так как точность метода осреднения (а также и метода двух масштабов) гарантируется именно на таких интервалах времени, то функции вида $f(\tau) = \tau e^{-\tau}$ должны рассматриваться в рамках данного метода как качественно эквивалентные функции $f(\tau) = \tau$.

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon (y^2 - 1) \frac{dy}{dt}. \tag{8.7}$$

Решая это уравнение в виде ряда (8.2), для нахождения членов этого ряда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} + y_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} + y_1 &= -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta \partial \tau} + (y_0^2 - 1) \frac{\partial y_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial \theta^2} + y_2 &= -2\omega_2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta \partial \tau} + \\ &+ \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \right) (y_0^2 - 1) + 2y_0 y_1 \frac{\partial y_0}{\partial \theta} \\ &\dots \end{aligned}$$

Форму представления общего решения первого уравнения в этом примере мы выберем иной, чем в предыдущем:

$$y_0 = r_0(\tau) \sin [\theta + \varphi_0(\tau)].$$

Подставляя это решение в правую часть второго уравнения, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} + y_1 &= -2 \frac{dr_0}{d\tau} \cos(\theta + \varphi_0) + 2r_0 \frac{d\varphi_0}{d\tau} \sin(\theta + \varphi_0) + \\ &+ [r_0^2 \sin^2(\theta + \varphi_0) - 1] r_0 \cos(\theta + \varphi_0). \end{aligned}$$

Или, используя тождество

$$\sin^2(\theta + \varphi_0) \cos(\theta + \varphi_0) \equiv \frac{1}{4} \cos(\theta + \varphi_0) - \frac{1}{4} \cos 3(\theta + \varphi_0),$$

приводим это уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \theta^2} + y_1 &= \left(-2 \frac{dr_0}{d\tau} - r_0 + \frac{r_0^3}{4} \right) \cos(\theta + \varphi_0) + \\ &+ 2r_0 \frac{d\varphi_0}{d\tau} \sin(\theta + \varphi_0) - \frac{r_0^3}{4} \cos 3(\theta + \varphi_0). \end{aligned}$$

Условия ограниченности решений по θ приводят к соотношениям

$$\frac{dr_0}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_0^3}{4} - r_0 \right), \quad \frac{d\varphi_0}{d\tau} = 0.$$

Эти уравнения интегрируются точно, что и позволяет записать в явном виде решения первого приближения. В частности, стационарный режим, который представляет собой предельный цикл, или режим автоколебаний, определяется условием

$$r_0^3/4 - r_0 = 0,$$

откуда нетривиальное решение $r_0 = 2$.

Глава III

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

9

Динамические свойства упругого нерастяжимого кольца

В этом параграфе мы предполагаем построить общее решение линейных дифференциальных уравнений свободных колебаний вращающегося тонкого кольца, отражающее как явление прецессии волнового поля, так и закон колебаний по каждой форме. При этом скорость вращения кольца считается произвольной функцией времени.

Будем исходить из уравнения (2.7).

Рассмотрим случай $\omega = \text{const}$. Разыскивая частное решение уравнения (2.7) в виде $w_k = A_k \cos(\nu\tau + k\varphi + \alpha_k) \cos \mu\tau$, где ν и μ — неизвестные константы, получаем для их определения соотношения

$$\begin{aligned} -k^2(k^2 - 1)^2 + (\nu^2 + \mu^2)(k^2 + 1) - 4\omega\nu k - \omega^2 k^2(k^2 - 3) &= 0, \\ \nu(k^2 + 1) - 2\omega k &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\nu = \frac{2\omega k}{k^2 + 1}, \quad \mu^2 = \frac{k^2(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2} (k^2 + 1 + \omega^2). \quad (9.1)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.7) записывается так:

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=2}^{\infty} \{ & [A_k \cos(\nu\tau + k\varphi) + B_k \sin(\nu\tau + k\varphi)] \cos \mu\tau + \\ & + [C_k \cos(\nu\tau + k\varphi) + D_k \sin(\nu\tau + k\varphi)] \sin \mu\tau \}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где A_k, B_k, C_k, D_k — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Таким образом, мы приходим к тем же выводам, которые были сделаны во введении: во вращающемся кольце возбужденная форма колебаний w_k поворачивается относительно кольца на угол $\varphi = -2\omega t/(k^2 + 1)$, относительно инерциального пространства эта форма поворачивается на угол $\varphi_* = (k^2 - 1)\omega t/(k^2 + 1)$. Рассмотрим теперь общий случай переменной угловой скорости $\omega(\tau)$. Для этого будем решать уравнение (2.7) методом осреднения, полагая $\omega \ll 1$. Кроме этого, считаем $\omega(\tau)$ медленно меняющейся функцией времени. Это означает следующее: $\max |\dot{\omega}(\tau)| = \varepsilon$ является малой величиной, $\max |d\omega/d\tau|$ имеет порядок ε^2 .

Приведем уравнение (2.7) к стандартной форме заменой переменных $\{w(\tau, \varphi), \dot{w}(\tau, \varphi)\} \rightarrow \{a(\tau, k), m(\tau, k), b(\tau, k), n(\tau, k)\}$ по следующим формулам:

$$w = \sum_{k=2}^{\infty} [(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \cos \gamma_k \tau + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \sin \gamma_k \tau], \quad (9.3)$$

$$\dot{w} = \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k [-(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \sin \gamma_k \tau + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \cos \gamma_k \tau],$$

что приводит к дополнительному условию

$$(\dot{a} \cos k\varphi + \dot{b} \sin k\varphi) \cos \gamma_k \tau + (\dot{m} \cos k\varphi + \dot{n} \sin k\varphi) \sin \gamma_k \tau = 0. \quad (9.4)$$

Дифференцируя \dot{w} по τ , получаем

$$\ddot{w} = - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k^2 w_k + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k [-(\dot{a} \cos k\varphi + \dot{b} \sin k\varphi) \sin \gamma_k \tau + (\dot{m} \cos k\varphi + \dot{n} \sin k\varphi) \cos \gamma_k \tau]. \quad (9.5)$$

Подставляя теперь соотношения (9.3), (9.5) в уравнение (2.7), имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k^2 (k^2 + 1) w_k + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k (k^2 + 1) [(\dot{a} \cos k\varphi + \dot{b} \sin k\varphi) \sin \gamma_k \tau - \\ & - (\dot{m} \cos k\varphi + \dot{n} \sin k\varphi) \cos \gamma_k \tau] + \\ & + 4\omega \sum_{k=2}^{\infty} k \gamma_k [(a \sin k\varphi - b \cos k\varphi) \sin \gamma_k \tau + \\ & + (-m \sin k\varphi + n \cos k\varphi) \cos \gamma_k \tau] + \\ & + 2\dot{\omega} \sum_{k=2}^{\infty} k [(-a \sin k\varphi + b \cos k\varphi) \cos \gamma_k \tau + \\ & + (-m \sin k\varphi + n \cos k\varphi) \sin \gamma_k \tau] + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} [-k^2 (k^2 - 1)^2 - \omega^2 k^2 (k^2 - 3)] w_k = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Полагая $\gamma_k = k(k^2 - 1)/(k^2 + 1)^{1/2}$ и приравнявая в уравнениях (9.4), (9.6) коэффициенты при $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ нулю, получаем следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений, эквивалентную исходному уравнению (2.7) в частных производных:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 2p (b \sin \gamma_k \tau - n \cos \gamma_k \tau) \sin \gamma_k \tau + \\ & + 2q (a \cos \gamma_k \tau + m \sin \gamma_k \tau) \sin \gamma_k \tau - 2r\dot{\omega} (b \cos \gamma_k \tau + n \sin \gamma_k \tau) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \gamma_k \tau, \quad \dot{m} = -2p (b \sin \gamma_k \tau - n \cos \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau - \\ & - 2q (a \cos \gamma_k \tau + m \sin \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau + 2r\dot{\omega} (b \cos \gamma_k \tau + \\ & + n \sin \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau, \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = & -2p (a \sin \gamma_k \tau - m \cos \gamma_k \tau) \sin \gamma_k \tau + \\ & + 2q (b \cos \gamma_k \tau + n \sin \gamma_k \tau) \sin \gamma_k \tau + 2r\dot{\omega} (a \cos \gamma_k \tau + \\ & + m \sin \gamma_k \tau) \sin \gamma_k \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{n} = & 2p (a \sin \gamma_k \tau - m \cos \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau - 2q (b \cos \gamma_k \tau + \\ & + n \sin \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau - 2r\dot{\omega} (a \cos \gamma_k \tau + m \sin \gamma_k \tau) \cos \gamma_k \tau \\ & (k = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{2k\omega}{k^2 + 1}, \quad q = \frac{\omega^2 k^2 (k - 3)}{2\gamma_k (k^2 + 1)^2}, \quad r = \frac{k}{\gamma_k (k^2 + 1)}. \quad (9.8)$$

В соответствии со сделанными предположениями p имеет порядок ε , а q и $r\dot{\omega}$ — порядок ε^2 . Выполним в уравнениях (9.7) замену, устраняющую быстроменяющиеся члены первого порядка малости:

$$\begin{aligned} a &= a_1 - p (2\gamma_k)^{-1} (b_1 \sin 2\gamma_k \tau - n_1 \cos 2\gamma_k \tau), \\ m &= m_1 + p (2\gamma_k)^{-1} (n_1 \sin 2\gamma_k \tau + b_1 \cos 2\gamma_k \tau), \\ b &= b_1 + p (2\gamma_k)^{-1} (a_1 \sin 2\gamma_k \tau - m_1 \cos 2\gamma_k \tau), \\ n &= n_1 - p (2\gamma_k)^{-1} (m_1 \sin 2\gamma_k \tau + a_1 \cos 2\gamma_k \tau). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Введем матрицу-столбец $\mathbf{z} = (a, m, b, n)^T$. Тогда система уравнений (9.7) переписывается в виде матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{z}} = p [A + B(\tau)] \mathbf{z} + \varepsilon^2 C(\tau) \mathbf{z},$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B(\tau) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\cos 2\gamma_k \tau & -\sin 2\gamma_k \tau \\ 0 & 0 & -\sin 2\gamma_k \tau & \cos 2\gamma_k \tau \\ \cos 2\gamma_k \tau & \sin 2\gamma_k \tau & 0 & 0 \\ \sin 2\gamma_k \tau & -\cos 2\gamma_k \tau & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (9.10)$$

слагаемое $\varepsilon^2 C(\tau)$ представляет собой малые члены порядка ε^2 . Это уравнение в результате замены (9.9), записываемой в матричной форме

$$z = [E + pD(\tau)]z_1, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{dD(\tau)}{d\tau} = B(\tau), \tag{9.11}$$

$$D(\tau) = \frac{1}{2\gamma_k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin 2\gamma_k \tau & \cos 2\gamma_k \tau \\ 0 & 0 & \cos 2\gamma_k \tau & \sin 2\gamma_k \tau \\ \sin 2\gamma_k \tau & -\cos 2\gamma_k \tau & 0 & 0 \\ -\cos 2\gamma_k \tau & -\sin 2\gamma_k \tau & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с точностью до членов порядка ε^3 приводится к виду

$$[E + pD(\tau)]\dot{z}_1 + pB(\tau)z_1 = p[A + B(\tau)][E + pD(\tau)]z_1 + \varepsilon^2 C(\tau)z_1,$$

откуда в рамках принятой точности имеем

$$\dot{z}_1 = p[E - pD(\tau)\{-B(\tau) + [A + B(\tau)][E + pD(\tau)]\}]z_1 + \varepsilon^2 C(\tau)z_1$$

или

$$\dot{z}_1 = pAz_1 + p^2[AD(\tau) - D(\tau)A + B(\tau)D(\tau)]z_1 + \varepsilon^2 C(\tau)z_1.$$

Компоненты полученного уравнения являются медленно меняющимися функциями времени, поэтому здесь применим метод осреднения. Осредним правые части уравнения по времени τ , считая z_1 , $\omega(\tau)$, $\dot{\omega}(\tau)$ постоянными и принимая во внимание (9.7) — (9.11). В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= p(\tau)b_1 + q_1(\tau)m_1 - r\dot{\omega}(\tau)n_1, \\ \dot{m}_1 &= p(\tau)n_1 - q_1(\tau)a_1 + r\dot{\omega}(\tau)b_1, \\ \dot{b}_1 &= -p(\tau)a_1 + q_1(\tau)n_1 + r\dot{\omega}(\tau)m_1, \\ \dot{n}_1 &= -p(\tau)m_1 - q_1(\tau)b_1 - r\dot{\omega}(\tau)a_1, \\ q_1(\tau) &= \omega^2(\tau)k^2(k^2 - 1)^2[2\gamma_k(k^2 + 1)^2]^{-1}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Эти уравнения близки по структуре к уравнениям гироскопа Геккелера [5], отличаясь от них лишь зависящими от ускорения $\dot{\omega}(\tau)$ членами. Точно так же, как и уравнения гироскопа Геккелера, уравнения (9.12) допускают точное интегрирование при произвольном изменении угловой скорости $\omega(\tau)$. Для этой цели сделаем еще одну замену переменных

$$z_1 = Fz_2 \tag{9.13}$$

с постоянной матрицей

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

которая обладает свойствами $F^2 = F$, $F = F^{-1}$. В результате такой замены система (9.13) распадается на две независимые подсистемы:

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -r\dot{\omega}(\tau)a_2 + [p(\tau) - q_1(\tau)]b_2, & \dot{m}_2 &= r\dot{\omega}(\tau)m_2 + \\ &+ [p(\tau) + q_1(\tau)]n_2, \\ \dot{b}_2 &= -r\dot{\omega}(\tau)b_2 - [p(\tau) - q_1(\tau)]a_2, & \dot{n}_2 &= r\dot{\omega}(\tau)n_2 - \\ &- [p(\tau) + q_1(\tau)]m_2. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Полученные подсистемы путем введения комплексных переменных $\bar{a} = a_2 + ib_2$ и $\bar{m} = m_2 + in_2$ сводятся к линейным дифференциальным уравнениям первого порядка, которые легко интегрируются. Отделяя действительную и мнимую части полученных решений и возвращаясь к исходным переменным, получаем следующее общее решение системы (9.14):

$$\begin{aligned} a_2 &= e^{-r\omega(\tau)} \left\{ A \cos \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi + B \sin \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi \right\}, \\ b_2 &= e^{-r\omega(\tau)} \left\{ -A \sin \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi + B \cos \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi \right\}, \\ m_2 &= e^{r\omega(\tau)} \left\{ M \cos \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi + N \sin \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\}, \\ n_2 &= e^{r\omega(\tau)} \left\{ -M \sin \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi + N \cos \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Здесь A, B, M, N — произвольные постоянные.

Решение системы (9.12) получается из найденного решения (9.15) по формулам (9.13), после чего посредством формул (9.9) находится решение системы (9.7) с погрешностью порядка ε^2 на интервале времени порядка ε^{-1} . И наконец, подстановка этого решения в формулы основной замены (9.3) дает общее решение исходного дифференциального уравнения (2.7) с теми же оценками точности.

Проделаем все эти выкладки для частного решения этого уравнения, соответствующего стоячей волне $w = C \cos k\varphi \cos \mu t$ в невращающемся кольце. Полагая $A = N = C/2$, $B = M = 0$

в формулах (9.15) и используя формулы (9.12), находим

$$a_1 = \frac{C}{2} \left\{ e^{-r\omega(\tau)} \cos \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi + e^{r\omega(\tau)} \cos \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\},$$

$$m_1 = \frac{C}{2} \left\{ e^{-r\omega(\tau)} \sin \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi - e^{r\omega(\tau)} \sin \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\},$$
(9.16)

$$b_1 = \frac{C}{2} \left\{ -e^{-r\omega(\tau)} \sin \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi - e^{r\omega(\tau)} \sin \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\},$$

$$n_1 = \frac{C}{2} \left\{ e^{-r\omega(\tau)} \cos \int_0^\tau [p(\xi) - q_1(\xi)] d\xi - e^{r\omega(\tau)} \cos \int_0^\tau [p(\xi) + q_1(\xi)] d\xi \right\}.$$

Далее, не снижая принятой точности вычислений, можно положить $\exp r\omega(\tau) \simeq 1 + r\omega(\tau)$. Учитывая это и подставляя решение (9.16) в формулы (9.9), имеем

$$a = C \left\{ \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\cos \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] - \right.$$

$$- r\omega(\tau) \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\sin \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] \left. \right\} +$$

$$+ C \frac{p}{2\gamma_k} \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\sin \left(2\gamma_k \tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right],$$
(9.17)

$$m = C \left\{ - \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\sin \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] - \right.$$

$$- r\omega(\tau) \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\cos \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] \left. \right\} -$$

$$- C \frac{p}{2\gamma_k} \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\cos \left(2\gamma_k \tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right],$$

$$b = C \left\{ - \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\cos \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] - r\omega(\tau) \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \times \right.$$

$$\times \left[\sin \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] \left. \right\} +$$

$$+ C \frac{p}{2\gamma_k} \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\sin \left(2\gamma_k \tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 n = & C \left\{ \left[\sin \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\sin \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] - r\omega(\tau) \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left[\cos \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right] \right\} - \\
 & - C \frac{p}{2\gamma_k} \left[\cos \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right] \left[\cos \left(2\gamma_k\tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right].
 \end{aligned}$$

Функции (9.13) являются решением осредненной системы уравнений (9.7) во втором приближении. Подставляя их в формулы (9.3), получаем, что

$$\begin{aligned}
 w = & C \left\{ \left[\cos \left(k\varphi + \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right) \right] \left[\cos \left(\gamma_k\tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right] \right\} + \\
 & + \left[\frac{p(\tau)}{2\gamma_k} - r\omega(\tau) \right] \left[\sin \left(k\varphi + \int_0^\tau p(\xi) d\xi \right) \right] \times \\
 & \times \left[\sin \left(\gamma_k\tau + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi \right) \right].
 \end{aligned}$$

В силу обозначений (9.8) $p/2\gamma_k - r\omega = 0$, поэтому рассматриваемое частное решение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 w = & C \left[\cos \left(k\varphi + \frac{2k}{k^2+1} \int_0^\tau \omega(\xi) d\xi \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ \cos \frac{k(k^2-1)}{\sqrt{k^2+1}} \left[\tau + \frac{1}{2(k^2+1)} \int_0^\tau \omega^2(\xi) d\xi \right] \right\} + 0(\varepsilon^2). \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

Формула (9.18) для переменной угловой скорости и формулы (1.19) — (1.21) показывают, что переменность скорости вращения кольца с точностью до малых величин второго порядка не изменяет свойств волнового поля. Волна поворачивается относительно кольца на угол φ , пропорциональный углу поворота кольца относительно инерциального пространства:

$$\varphi = - \frac{2}{k^2+1} \int_0^\tau \omega(\xi) d\xi. \quad (9.19)$$

Угол поворота волны φ_* относительно инерциального пространства выражается формулой

$$\varphi_* = \frac{k^2-1}{k^2+1} \int_0^\tau \omega(\xi) d\xi. \quad (9.20)$$

Формула (9.19) показывает, что по измеренному углу φ можно вычислить угол поворота объекта, равный $\int_0^{\varphi} \omega(\xi) d\xi$. Примечательно, что коэффициенты в формулах (9.19), (9.20) зависят только от номера формы k и не зависят ни от размеров кольца, ни от свойств его материала. Явления такого рода были впервые отмечены в [16] для случая постоянной угловой скорости.

Из формулы (9.19) видно также, что происходит малое изменение частоты колебаний, пропорциональное интегралу от ω^2 .

10

Динамические свойства упругого растяжимого кольца

Для учета растяжимости к плотности функции Лагранжа (2.4) необходимо добавить нормированную плотность потенциальной энергии деформаций растяжения. Вместо прежнего условия нерастяжимости $v' - w = 0$, означающего равенство нулю относительного удлинения средней линии кольца, необходимо связать это относительное удлинение с усилием растяжения $N = \frac{SE}{R}(v' - w) = SE\varepsilon$. Потенциальная энергия растяжения (плотность) равна $\frac{1}{2}NRe = \frac{SE}{2R}(v' - w)^2$. Следовательно, плотность лагранжиана в данном случае запишется:

$$L = \frac{\rho RS}{2} [(\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2] - \frac{EI}{2R^3} (w'' + v')^2 - \frac{ES}{2R} (v' - w)^2. \quad (10.1)$$

Нормируя ее произведением $\rho RS'$ и вводя обозначения

$$\kappa^2 = \frac{EI}{\rho R^4 S}, \quad \delta^2 = \frac{E}{\rho R^2},$$

запишем вместо (2.4) лагранжиан в виде

$$L = \frac{1}{2} [(\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2] - \frac{\kappa^2}{2} (w'' + v')^2 - \frac{\delta^2}{2} (v' - w)^2. \quad (10.2)$$

В данном случае связь отсутствует и уравнения Лагранжа (2.5) имеют более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{\partial L}{\partial w} &= 0 \end{aligned}$$

Из этих уравнений в силу формул (10.2) находим

$$\ddot{v} - 2\omega\dot{w} - \delta^2(v'' - w') - \kappa^2(w'' + v'') = 0.$$

$$\dot{w} + 2\omega\dot{v} - \delta^2(v' - w) + \kappa^2(w^{IV} + v''') = 0, \quad \omega = \Omega/\kappa. \quad (10.3)$$

Предполагая в дальнейшем рассматривать лишь малые угловые скорости ω , в этих уравнениях пренебрегаем членами ω^2 и $\dot{\omega}$.

Общее решение порождающей системы (при $\omega = 0$) имеет вид

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{G_1} [(p \cos k\varphi + q \sin k\varphi) \cos \mu_1\tau + (r \cos k\varphi + s \sin k\varphi) \sin \mu_1\tau] + (a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \cos \mu_2\tau + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \sin \mu_2\tau \right\}, \quad (10.4)$$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \{ (q \cos k\varphi - p \sin k\varphi) \cos \mu_1\tau + (s \cos k\varphi - r \sin k\varphi) \sin \mu_1\tau + G_2 [(b \cos k\varphi - a \sin k\varphi) \cos \mu_2\tau + (n \cos k\varphi - m \sin k\varphi) \sin \mu_2\tau] \},$$

где частоты μ_1 и μ_2 определяются соотношением

$$\mu^2 = \frac{1}{2} (\kappa^2 k^2 + \delta^2) (1 + k^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (1 + k^2)^2 (\kappa^2 k^2 + \delta^2)^2 - k^2 (k^2 - 1)^2 \kappa^2 \delta^2}, \quad (10.5)$$

а коэффициенты G_1 и G_2 , соответствующие корням μ_1 и μ_2 , имеют вид

$$G(\mu) = \frac{-\mu^2 + k^2(\kappa^2 + \delta^2)}{k(\kappa^2 k^2 + \delta^2)} \quad (G_1 G_2 + 1 = 0). \quad (10.6)$$

Чтобы избежать излишне громоздких выкладок, мы будем пользоваться иногда не самими выражениями для μ_1 , μ_2 , G_1 , G_2 , а их асимптотиками при больших δ :

$$\mu_1^2 \simeq (k^2 + 1) \delta^2, \quad \mu_2^2 \simeq \frac{k^2(k^2 - 1)^2}{k^2 + 1} \kappa^2, \quad G_1 \simeq -\frac{1}{k}, \quad G_2 \simeq k. \quad (10.7)$$

Для того чтобы решить полную систему (10.3), будем рассматривать уравнения (10.4) в качестве замены переменных (v, \dot{v}, w, \dot{w}) \rightarrow (p, q, r, s, a, b, m, n), наложив на новые переменные дополнительные условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{G_1} [(\dot{p} \cos k\varphi + \dot{q} \sin k\varphi) \cos \mu_1\tau + (\dot{r} \cos k\varphi + \dot{s} \sin k\varphi) \sin \mu_1\tau] + (\dot{a} \cos k\varphi + \dot{b} \sin k\varphi) \cos \mu_2\tau + (\dot{m} \cos k\varphi + \dot{n} \sin k\varphi) \sin \mu_2\tau \right\} = 0 \quad (10.8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(\dot{q} \cos k\varphi - \dot{p} \sin k\varphi) \cos \mu_1 \tau + (\dot{s} \cos k\varphi - \dot{r} \sin k\varphi) \sin \mu_1 \tau + \\ + G_2 [(\dot{b} \cos k\varphi - \dot{a} \sin k\varphi) \cos \mu_2 \tau + \\ + (\dot{n} \cos k\varphi - \dot{m} \sin k\varphi) \sin \mu_2 \tau]\} = 0.$$

Подставляя функции (10.4) в уравнения (10.3) и учитывая соотношения (10.8), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_1}{G_1} [-(\dot{p} \cos k\varphi + \dot{q} \sin k\varphi) \sin \mu_1 \tau + (\dot{r} \cos k\varphi + \right. \\ \left. + \dot{s} \sin k\varphi) \cos \mu_1 \tau] + \mu_2 [-(\dot{a} \cos k\varphi + \dot{b} \sin k\varphi) \sin \mu_2 \tau + \right. \\ \left. + (\dot{m} \cos k\varphi + \dot{n} \sin k\varphi) \cos \mu_2 \tau] \right\} = 2\omega \sum_{k=0}^{\infty} \{ \mu_1 [(-q \cos k\varphi + \\ + p \sin k\varphi) \sin \mu_1 \tau + (s \cos k\varphi - r \sin k\varphi) \cos \mu_1 \tau] + \quad (10.9) \\ + G_2 \mu_2 [(-b \cos k\varphi + a \sin k\varphi) \sin \mu_2 \tau + \\ + (n \cos k\varphi - m \sin k\varphi) \cos \mu_2 \tau] \},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \mu_1 [(-\dot{q} \cos k\varphi + \dot{p} \sin k\varphi) \sin \mu_1 \tau + (\dot{s} \cos k\varphi - \\ - \dot{r} \sin k\varphi) \cos \mu_1 \tau] + G_2 \mu_2 [(-\dot{b} \cos k\varphi + \dot{a} \sin k\varphi) \sin \mu_2 \tau + \\ + (\dot{n} \cos k\varphi - \dot{m} \sin k\varphi) \cos \mu_2 \tau] \} = -2\omega \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_1}{G_1} [-(p \cos k\varphi + \right. \\ \left. + q \sin k\varphi) \sin \mu_1 \tau + (r \cos k\varphi + s \sin k\varphi) \cos \mu_1 \tau] + \right. \\ \left. + \mu_2 [-(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \sin \mu_2 \tau + \right. \\ \left. + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \cos \mu_2 \tau] \right\}.$$

Приравнивая в соотношениях (10.8) и (10.9) члены при одинаковых гармониках $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную исходной системе в частных производных (10.3):

$$\frac{1}{G_1} (\dot{p} \cos \mu_1 \tau + \dot{r} \sin \mu_1 \tau) + \dot{a} \cos \mu_2 \tau + \dot{m} \sin \mu_2 \tau = 0, \quad (10.10)$$

$$\frac{\mu_1}{G_1} (-\dot{p} \sin \mu_1 \tau + \dot{r} \cos \mu_1 \tau) + \mu_2 (-\dot{a} \sin \mu_2 \tau + \dot{m} \cos \mu_2 \tau) = \\ = 2\omega [\mu_1 (-q \sin \mu_1 \tau + s \cos \mu_1 \tau) + G_2 \mu_2 (-b \sin \mu_2 \tau + n \cos \mu_2 \tau)],$$

$$\dot{p} \cos \mu_2 \tau + \dot{r} \sin \mu_1 \tau + G_2 (\dot{a} \cos \mu_2 \tau + \dot{m} \sin \mu_2 \tau) = 0,$$

$$\mu_1 (-\dot{p} \sin \mu_1 \tau + \dot{r} \cos \mu_1 \tau) + G_2 \mu_2 (-\dot{a} \sin \mu_2 \tau + \dot{m} \cos \mu_2 \tau) = \\ = 2\omega \frac{\mu_1}{G_1} (-q \sin \mu_1 \tau + s \cos \mu_1 \tau) + \mu_2 (-b \sin \mu_2 \tau + n \cos \mu_2 \tau),$$

$$\begin{aligned}
& \dot{q} \cos \mu_1 \tau + \dot{s} \sin \mu_1 \tau + G_2 (b \cos \mu_2 \tau + \dot{n} \sin \mu_2 \tau) = 0, \\
& \mu_1 (-\dot{q} \sin \mu_1 \tau + \dot{s} \cos \mu_1 \tau) + G_2 \mu_2 (-\dot{b} \sin \mu_2 \tau + \dot{n} \cos \mu_2 \tau) = \\
& = -2\omega \left[\frac{\mu_1}{G_1} (-p \sin \mu_1 \tau + r \cos \mu_1 \tau) + \right. \\
& \quad \left. + \mu_2 (-a \sin \mu_2 \tau + m \cos \mu_2 \tau) \right], \\
& \frac{1}{G_1} (\dot{q} \cos \mu_1 \tau + \dot{s} \sin \mu_1 \tau) + \dot{b} \cos \mu_2 \tau + \dot{n} \sin \mu_2 \tau = 0, \\
& \frac{\mu_1}{G_1} (-\dot{q} \sin \mu_1 \tau + \dot{s} \cos \mu_1 \tau) + \mu_2 (-\dot{b} \sin \mu_2 \tau + \dot{n} \cos \mu_2 \tau) = \\
& = 2\omega [\mu_1 (p \sin \mu_1 \tau - r \cos \mu_1 \tau) + G_2 \mu_2 (a \sin \mu_2 \tau - \\
& \quad - m \cos \mu_2 \tau)], \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Параметры μ_1, μ_2, G_1, G_2 зависят от k . В системе (10.10) искомыми являются $p(\tau, k), q(\tau, k), r(\tau, k), s(\tau, k), a(\tau, k), b(\tau, k), m(\tau, k), n(\tau, k)$.

После разрешения системы (10.10) относительно производных и осреднения полученной системы в стандартной форме по времени находим

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} q, & \dot{a} &= \omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} b, \\
\dot{r} &= -\omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} s, & \dot{m} &= \omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} n, \\
\dot{q} &= \omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} p, & \dot{b} &= -\omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} a, \\
\dot{s} &= \omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} r, & \dot{n} &= -\omega \frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} m.
\end{aligned} \tag{10.11}$$

Точные решения (10.4) системы (10.3) для случая $\omega \equiv 0$ показывают, что каждая форма колебаний представлена двумя частотами: μ_1 и μ_2 . Таким образом, например, основная возмущенная форма в виде овала $k = 2$ может совершать колебания как с частотой μ_2 , примерно равной частоте колебаний по основной форме для случая нерастяжимого кольца, так и с весьма высокой частотой μ_1 . Колебания с частотой μ_2 мы будем называть основными, колебания с частотой μ_1 — побочными. Основные колебания описываются, как и раньше, переменными a, m, b, n , побочные — переменными p, q, r, s .

В осредненных уравнениях первого приближения (10.11) происходит полное разделение основных и побочных колебаний. Отличие уравнений, описывающих основные колебания в рассматриваемом случае, от случая нерастяжимого кольца заключается лишь в изменении коэффициента при ω . Вместо $2k/(k^2 + 1)$ в случае нерастяжимого кольца имеем $(1 - G_1 G_2)/(G_2 - G_1)$ в случае

растяжимого. Результат является корректным в том смысле, что при $\delta \rightarrow \infty$ $\frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} \rightarrow \frac{2k}{k^2 + 1}$ в соответствии с формулами (10.7). Таким образом, прецессия основного волнового поля относительно тела кольца определяется формулой

$$\varphi = - \frac{1 - G_1 G_2}{2(G_2 - G_1)} \int_0^{\tau} \omega(\xi) d\xi.$$

Для растяжимого кольца рассматриваемый коэффициент пропорциональности оказывается уже зависящим не только от номера формы, но и от размеров кольца и характеристик его материала. Правда, зависимость эта очень слабая.

Побочная форма колебаний, как следует из (10.11), будет прецессировать относительно кольца с той же скоростью, что и основная, однако в противоположную сторону. Она будет перемещаться вперед по кольцу в сторону его вращения. Этот интересный факт не имеет практического значения.

Заметим, что разделение колебаний по частотам на основные и побочные никак не связано с разделением деформаций кольца на изгибные и деформации растяжения. Так, при $p = r = q = s = 0$ кольцо совершает основные колебания с частотой μ_2 , при этом в соответствии с формулой (10.4) имеют место как изгибные деформации, которые характеризуются перемещением w , так и деформации растяжения, которые характеризуются комбинацией $v' - w$.

Для коэффициента $(1 - G_1 G_2)/(G_2 - G_1)$ можно установить следующую асимптотическую формулу:

$$\frac{1 - G_1 G_2}{G_2 - G_1} = \frac{2k}{k^2 + 1} \left[1 + 2 \left(k \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right)^2 \frac{\kappa^2}{\delta^2} + \dots \right],$$

где точками обозначены члены порядка κ^4/δ^4 и выше. Эта формула показывает, что учет растяжимости кольца приводит к увеличению рассматриваемого коэффициента. Следует заметить, однако, что этот результат имеет значение лишь в рамках рассматриваемых уравнений (10.3). Сами уравнения получены в предположении, что кольцо тонкое и членами κ^2/δ^2 в сумме с единицей допустимо пренебречь.

11

Точные решения уравнений динамики упругого нерастяжимого кольца

В параграфе 9 выражение для скорости прецессии волны относительно вращающегося кольца было получено приближенным методом осреднения. Применение метода осреднения позволяет получить не только информацию о прецессии волны, но и общее решение задачи при произвольной угловой скорости ω (τ) враще-

ния кольца. Между тем во введении было показано, что формула (9.19) является точной и что она может быть получена и без применения метода осреднения, если не стремиться построить общее решение.

В настоящем параграфе вопрос о выводе основной формулы (9.19) решается подробнее. Также рассматриваются и те частные законы вращения кольца, когда удается получить точно и общее решение.

Исходным является уравнение

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2 (w^{IV} + 3w'') = 0, \quad (11.1)$$

совпадающее с уравнением (2.7). Однако принятые в параграфе 9 предположения о малости ω и «медленности» ее изменения со временем снимаются, тем самым $\omega(\tau)$ считается произвольной функцией времени.

Как ясно из параграфа 9, уравнения колебаний по различным формам оказываются независимыми, поэтому решение поставленной задачи можно искать сразу для интересующей нас формы, имея в виду рассмотрение основной формы ($k = 2$), будем искать w в виде

$$w = \alpha \cos 2\varphi + \beta \sin 2\varphi. \quad (11.2)$$

Выбор конкретного номера формы связан лишь со стремлением к несколько более компактным выкладкам. Все следующее легко повторяется для любого номера k .

В результате приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ вида

$$\begin{aligned} 5\dot{\alpha} - 8\omega(\tau)\beta - 4\dot{\omega}(\tau)\beta + [36 + 4\omega^2(\tau)]\alpha &= 0, \\ 5\dot{\beta} + 8\omega(\tau)\dot{\alpha} + 4\dot{\omega}(\tau)\alpha + [36 + 4\omega^2(\tau)]\beta &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

До решения этой системы выполним предварительный анализ ее свойств. Уравнение (11.1) инвариантно относительно группы сдвига

$$\varphi \rightarrow \varphi - \gamma, \quad (11.4)$$

где γ — некоторая фиксированная постоянная. Замена переменных (11.2) приобретает форму

$$w = \alpha \cos 2\varphi + \beta \sin 2\varphi = \alpha_1 \cos 2(\varphi - \gamma) + \beta_1 \sin 2(\varphi - \gamma). \quad (11.5)$$

Иными словами, группа (11.4) индуцирует в пространстве переменных α, β ортогональную группу, относительно которой будут инвариантны уравнения (11.3)

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \cos 2\gamma - \beta_1 \sin 2\gamma, \\ \beta &= \alpha_1 \sin 2\gamma + \beta_1 \cos 2\gamma. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Уравнения (11.3) и замена переменных (11.6) переписутся следующим образом:

$$5\ddot{\mathbf{x}} + 8\omega\bar{E}\dot{\mathbf{x}} + 4\dot{\omega}\bar{E}\mathbf{x} + (36 + 4\omega^2)\mathbf{x} = 0, \quad (11.7)$$

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y}. \quad (11.8)$$

Уравнение (11.7) инвариантно относительно группы (11.8). Это означает, что после замены переменных по формуле (11.8) мы приходим к тому же самому уравнению:

$$5\ddot{\mathbf{y}} + 8\omega\bar{E}\dot{\mathbf{y}} + 4\dot{\omega}\bar{E}\mathbf{y} + (36 + 4\omega^2)\mathbf{y} = 0.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\gamma} = - \begin{pmatrix} \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \\ -\cos 2\gamma & \sin 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы имеют место соотношения

$$A^T \bar{A} = \bar{E}, \quad d\bar{A}/d\gamma = -2A, \quad A^T \bar{E} \bar{A} = -E,$$

где A^T — транспонированная матрица A .

Выполним теперь в уравнении (11.7) замену переменных ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$) по формуле (11.8), считая, что $\gamma = \gamma(\tau)$ — некоторая, пока неизвестная функция времени:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\dot{\mathbf{y}} + 2\dot{\gamma}\bar{A}\mathbf{y},$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\ddot{\mathbf{y}} + 4\dot{\gamma}\bar{A}\dot{\mathbf{y}} + 2\ddot{\gamma}\bar{A}\mathbf{y} - 4\dot{\gamma}^2 A\mathbf{y}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (11.7) и умножая его слева на A^T , получаем

$$5\ddot{\mathbf{y}} + 4(5\dot{\gamma} + 2\omega)\bar{E}\dot{\mathbf{y}} + 2(5\ddot{\gamma} + 2\dot{\omega})\bar{E}\mathbf{y} + (36 + 4\omega^2 - 20\dot{\gamma}^2 - 16\dot{\gamma}\omega)\mathbf{y} = 0.$$

Если выбрать

$$\gamma = -\frac{2}{5} \int \omega(\tau) d\tau, \quad (11.9)$$

то члены, содержащие симплектическую матрицу \bar{E} , обращаются в нуль, а само матричное уравнение принимает форму

$$5\ddot{\mathbf{y}} + 36(1 + \frac{1}{5}\omega^2)\mathbf{y} = 0.$$

В системе (11.3) уравнения становятся независимыми:

$$\begin{aligned} 5\ddot{\alpha}_1 + 36(1 + \frac{1}{5}\omega^2)\alpha_1 &= 0, \\ 5\ddot{\beta}_1 + 36(1 + \frac{1}{5}\omega^2)\beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Для некоторых представляющих практический интерес типов зависимости ω (τ) эти уравнения могут быть решены точно. Им соответствуют следующие частные случаи движения основания.

Случай 1, когда скорость ω (τ) монотонно возрастает. Рассмотрим случай линейного возрастания во времени центробежной силы:

$${}^{1/5}\omega^2(\tau) = l\tau \quad (l > 0). \quad (11.11)$$

Тогда уравнения (11.10) принимают вид

$$\ddot{\alpha}_1 + {}^{36/5}(1 + l\tau)\alpha_1 = 0. \quad (11.12)$$

Выполним замену времени $\tau \rightarrow \theta$ по формуле

$$\theta = a + b\tau. \quad (11.13)$$

Уравнение (11.12) записывается в форме

$$\frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \frac{36}{5b^2} \left(l \frac{\theta}{b} + 1 - \frac{la}{b} \right) \alpha_1 = 0.$$

Полагая $36l/5b^3 = 1$ и $1 - la/b = 0$, находим, что

$$b = \sqrt[3]{36l/5}, \quad a = \sqrt[3]{36/(5l^2)}.$$

В результате уравнение (11.12) приводится к уравнению Эйри [13]

$$d^2\alpha_1/d\theta^2 + \theta\alpha_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения выражается через функции Эйри:

$$\alpha_1 = C_1 Ai(-\theta) + C_2 Vi(-\theta). \quad (11.14)$$

Значения функций Эйри $Ai(-\theta)$ и $Vi(-\theta)$ следующие.

θ	0,00	0,25	0,5	0,75	1,0	2,0	3,0
$Ai(-\theta)$	0,3550	0,4187	0,4757	0,5178	0,5356	0,2274	-0,3788
$Vi(-\theta)$	0,6149	0,5014	0,3804	0,2478	0,1040	-0,4123	-0,4983
θ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
$Ai(-\theta)$	-0,0703	0,3508	-0,3291	0,1843	-0,0527	0,0221	0,0402
$Vi(-\theta)$	0,3922	-0,4384	-0,1467	0,2938	-0,3313	0,3249	-0,3147

Вид этих функций изображен на рис. 12, 13.

При больших θ функции $Ai(-\theta)$ и $Vi(-\theta)$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$Ai(-\theta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\theta}} \sin\left(\frac{2}{3}\theta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Vi(-\theta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\theta}} \cos\left(\frac{2}{3}\theta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Для β_1 решение представляется аналогичным образом:

$$\beta_1 = C_3 Ai(-\theta) + C_4 Vi(-\theta).$$

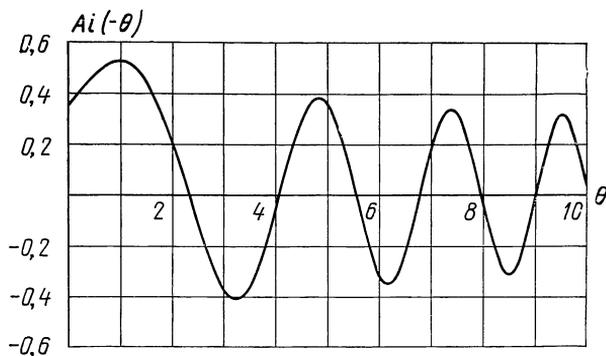


Рис. 12

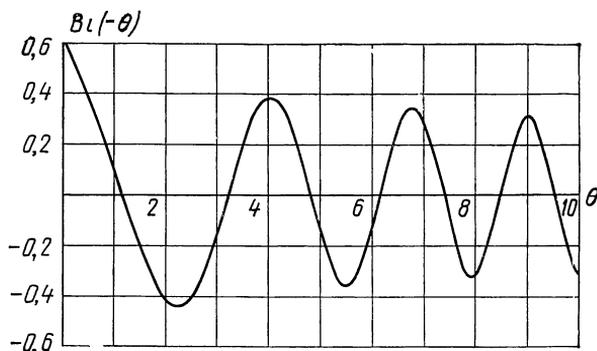


Рис. 13

Общее решение уравнения (11.1) в соответствии с (11.5) для основной формы имеет вид

$$w = [C_1 \text{Ai}(-\theta) + C_2 \text{Bi}(-\theta)] \cos 2 \left(\varphi + \frac{2}{5} \int_0^{\tau} \omega(\tau) d\tau \right) + \\ + [C_3 \text{Ai}(-\theta) + C_4 \text{Bi}(-\theta)] \sin 2 \left(\varphi + \frac{2}{5} \int_0^{\tau} \omega(\tau) d\tau \right), \quad (11.15)$$

где θ нужно заменить в соответствии с формулой (11.13).

Полное общее решение уравнения (11.1) получается суммированием решений типа (11.15) по всем формам.

Решение (11.15) показывает, что прецессия стоячей волны при переменном вращении основания характеризуется формулой (11.9) точно. Этот вывод имеет общий характер и не зависит от вида зависимости скорости основания от времени. Это следует из того, что формула (11.9) была получена для общего случая и характеризует переход к системе координат, в которой стоячая волна не прецессирует. При этом нужно иметь в виду, что такая вращающаяся система координат, «стробоскопирующая» волну, существует только для гармонической волны, поскольку скорость вра-

щения такой системы координат зависит от номера формы колебаний. Таким образом, никакой вращающейся системы координат, в которой уравнение (11.1) приводилось бы к уравнению с постоянными коэффициентами, не существует. Уравнения (11.10) при этом характеризуют лишь закон колебаний стоячей волны во времени. В случае линейного возрастания ω (τ) точное решение получается в функциях параболического цилиндра [13].

Случай 2 — случай монотонного убывания угловой скорости во времени:

$$\omega^2/5 = \omega_0^2/5 - l\tau \quad (l > 0).$$

Это движение рассматривается на конечном интервале времени:

$$0 \leq \tau \leq \omega_0^2/(5l).$$

На этом интервале времени заменой типа (11.13) уравнения снова приводятся к уравнению Эйри и решения выписываются точно.

Случай 3 — случай вибрирующего основания:

$$\omega(\tau) = \omega_0 \sin \lambda\tau.$$

Здесь уравнения (11.10) приобретают вид

$$\ddot{\alpha}_1 + 36/5[(1 + \omega_0^2/10) - (\omega_0^2/10) \cos 2\lambda\tau] \alpha_1 = 0.$$

Это уравнение посредством обозначений

$$\theta = \lambda\tau, \quad a = (36/5\lambda^2)(1 + \omega_0^2/10), \quad q = 9\omega_0^2/(25\lambda^2) \quad (11.16)$$

приводится к канонической форме уравнения Матье [13]:

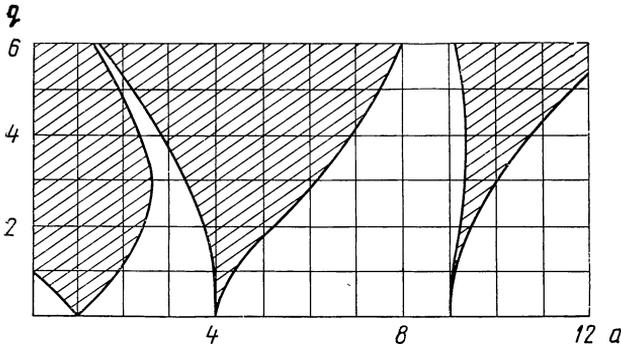
$$\frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + (a - 2q \cos 2\theta) \alpha_1 = 0. \quad (11.17)$$

Следовательно, и в этом случае уравнение (11.1) допускает полный точный анализ. Границы областей неустойчивости в параметрах (a, q) приведены на рис. 14.

Представляющая для нас особый интерес первая зона неустойчивости в параметрах (λ^2, ω_0^2) изображена на рис. 15. В широких диапазонах изменения λ и ω_0 эти границы весьма близки к прямолинейным.

Производная $d\omega_0^2/d\lambda^2$ в точке $\lambda^2 = 36/5$ равна для верхней границы $25/9$, для нижней — $25/27$. Эти же производные в пределе при $\lambda^2 \rightarrow \infty$ равны $2,458$ и $0,1389$ соответственно.

Если параметры (λ^2, ω_0^2) лежат внутри области неустойчивости, то половина решений уравнения (11.17) неограниченно возрастает с течением времени. Этот факт говорит о возможности использования явления механического резонанса для возбуждения незатухающих колебаний электрического резонатора наряду со способом возбуждения колебаний электрическими силами, который будет подробно рассмотрен в главе IV. Так же как и в случае параметрического возбуждения электрическими силами, для получения



ис. 14

установившихся незатухающих колебаний требуется ввести обратную связь, которая по измерениям амплитуды колебаний резонатора управляет амплитудой вибрации основания. В этом случае параметры λ^2 , ω_0^2 автоматически настраиваются на границу области неустойчивости и решение уравнения (11.17) выражается в периодических функциях Матье: $se_1(\theta, q)$, $se_1(\theta, q)$.

Случай 4 представляет собой вибрацию без резонанса, когда спектр вибрации основания имеет форму

$$\omega(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sin \lambda_k \tau.$$

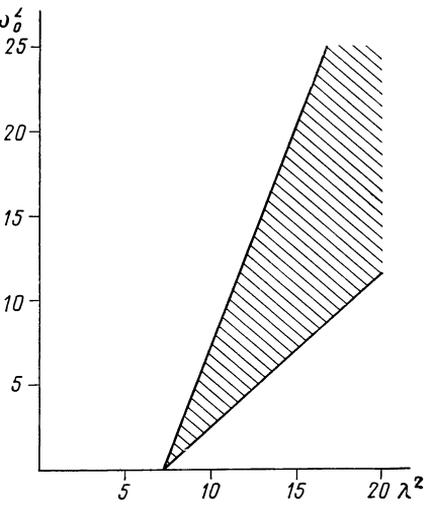


Рис. 15

Отсюда находим, что $\omega^2(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_k \omega_l \sin \lambda_k \tau \sin \lambda_l \tau$

и среднее по времени значение $\langle \omega^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2$.

Применение к уравнениям (11.10) метода осреднения в нерезонансном случае показывает, что воздействие вибрации в этом случае сводится к изменению собственной частоты резонатора в соответствии со следующей формулой:

$$\mu^2 = \frac{36}{5} \left(1 + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \right). \tag{11.18}$$

Рассмотренный прием, приведший к установлению точного вида оператора (11.9), основанный на применении группы (11.8), представляет собой матричную форму вывода, предложенного во введении, и обладает тем преимуществом, что для построения действительного решения уже не требуется разделять вещественную и мнимую части. Этот прием будет эффективно использоваться в дальнейшем при исследовании устойчивости стационарных колебаний при параметрическом возбуждении с обратной связью (см. параграф 17).

В заключение приведем еще один подход к установлению вида оператора (9.19), который окажется наиболее удобным далее при анализе инертных свойств упругих волн в полусферическом резонаторе (см. параграф 13).

Вернемся к уравнению (11.1), в котором осуществим замену независимой переменной $\varphi \rightarrow \psi$ по формуле

$$\varphi = \psi + \gamma(\tau), \quad (11.19)$$

где $\gamma(\tau)$ — функция времени, подлежащая определению.

Функцию $w(\tau, \varphi)$, выраженную через новую переменную ψ , обозначим $w_*(\tau, \psi)$:

$$w(\tau, \varphi) = w_*[\tau, \varphi - \gamma(\tau)],$$

$$\dot{w}(\tau, \varphi) = \dot{w}_* - w'_* \dot{\gamma},$$

$$\ddot{w}(\tau, \varphi) = \ddot{w}_* - 2\dot{\gamma}w'_* + w''_*\dot{\gamma}^2 - w_*\ddot{\gamma}. \quad (11.20)$$

Подставляя их в уравнение (11.1), получаем (опустим при w звездочку):

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} + [(4\omega + 2\dot{\gamma})\dot{w}' - 2\dot{w}''\dot{\gamma}] + [-w'''\dot{\gamma} + 2\dot{\omega}w' + w'\ddot{\gamma}] + \\ + w^{\text{VI}} + (2 + \dot{\gamma}^2 - \omega^2)w^{\text{IV}} + (1 - \dot{\gamma}^2 - 3\omega^2 - 4\omega\dot{\gamma})w'' = 0 \end{aligned} \quad (11.21)$$

Заметим, что существованию у уравнения (11.21) частного решения вида

$$w = f(\tau) \cos k\psi \quad (11.22)$$

препятствует наличие в уравнении заключенных в квадратные скобки членов. Эти члены характеризуют несамосопряженную часть дифференциального оператора (11.21).

Если удастся подобрать функцию $\gamma(\tau)$ так, чтобы эти члены обратились в нуль, то это и будет означать, что во вращающейся системе координат, характеризуемой преобразованием (11.19), имеет место стоячая волна вида (11.22). При переходе к системе координат, связанной с кольцом, решение (11.21) будет определять прецессирующую волну

$$w = \cos k[\varphi - \gamma(\tau)] f(\tau). \quad (11.23)$$

Для обращения в нуль несамосопряженной части оператора (11.21) достаточно выполнения равенств

$$\begin{aligned} \dot{w}''' \dot{\gamma} - (\dot{\gamma} + 2\omega) w'' &= 0, \\ w''' \dot{\gamma} - (\dot{\gamma} + 2\dot{\omega}) w'' &= 0. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Переопределенная система (11.24) определяет единственную неизвестную функцию $\gamma(\tau)$. Условия 2π периодичности $w(\tau, \psi)$ по ψ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} -k^2 \dot{\gamma} - (\dot{\gamma} + 2\omega) &= 0, \\ -k^2 \dot{\gamma} - (\dot{\gamma} + 2\dot{\omega}) &= 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

эта система совместна и удовлетворяется решением

$$\gamma(\tau) = -\frac{2}{k^2 + 1} \int_0^\tau \omega(\tau) d\tau, \quad (11.25)$$

которое зависит от номера волны k , так что несамосопряженная часть оператора (11.21) может быть уничтожена преобразованием (11.9) только вдоль гармонической по ψ волны.

Оставшаяся самосопряженная часть

$$\dot{w}'' - \dot{w} + w^{\text{VI}} + (2 + \dot{\gamma}^2 - \omega^2) w^{\text{IV}} + (1 - \dot{\gamma}^2 - 3\omega^2 - 4\omega\dot{\gamma}) w'' = 0 \quad (11.26)$$

определяет закон колебаний стоячей волны во времени — $f(\tau)$. В случае постоянной угловой скорости $\omega = \omega_0$ закон колебаний оказывается гармоническим: $f(\tau) = \cos \mu\tau$,

$$\mu = \frac{k^2(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2} (k^2 + 1 + \omega_0^2).$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в параграфе 9.

12

Нелинейные эффекты в упругом нерастяжимом кольце

Целью параграфа является выяснение влияния нелинейных свойств кольца на прецессию стоячей волны в случае его вращения. Будем для простоты предполагать угловую скорость вращения Ω постоянной. Упругие свойства кольца, как и прежде, будем считать линейными и подчиняющимися закону Гука. Нелинейность нами связывается лишь с чисто геометрическими обстоятельствами.

Сначала выведем точные дифференциальные уравнения колебаний тонкого нерастяжимого кольца без предположения малости амплитуд колебаний, следуя изложению работ [17]. Рассмотрим в плоскости xu кольцо в произвольном, деформированном состоя-

нии (рис. 16). В дальнейшем мы будем использовать следующие переменные и обозначения. Независимая переменная s определяет положение на кольце рассматриваемой точки и представляет собой длину дуги между некоторой начальной точкой кольца и рассматриваемой точкой. Полярные координаты этой точки, определяющие ее положение в плоскости xy и принимаемые за обобщенные лагранжевы координаты, обозначаются через r и θ . Угол Φ — вспомогательный угол, который потребуется в дальнейшем при вычислении потенциальной энергии.

Уравнения движения удобно составить в форме уравнений Лагранжа, для чего требуется выписать плотность потенциальной энергии, плотность кинетической энергии и уравнение связи. Выведем сначала уравнение связи. Для этого вычислим длину дуги кривой, изображающей среднюю линию кольца между точками s и $s + \Delta s$, где Δs — малое приращение. Из образованного приращением треугольника на рис. 17 находим

$$\Delta s^2 = (\Delta r)^2 + (r\Delta\theta)^2 = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + \left(r \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right] \Delta s^2,$$

откуда уравнение связи получается в виде

$$(r')^2 + (r\theta')^2 = 1. \quad (12.1)$$

Дифференцирование по независимой переменной, определяющей положение точки на кольце, будем обозначать штрихом.

Плотность кинетической энергии кольца равна

$$T = \frac{1}{2} \rho S [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta} + \Omega)^2], \quad (12.2)$$

так как плоскость xy , в которой определяется положение кольца, вращается с угловой скоростью Ω . Через S обозначена площадь

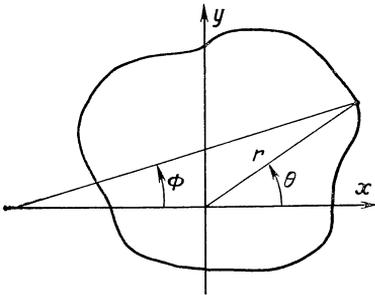


Рис. 16

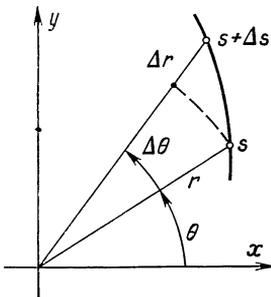


Рис. 17

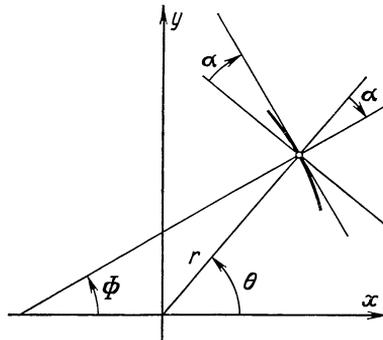


Рис. 18

поперечного сечения кольца. Угол Φ (рис. 18) определяет положение нормали к осевой линии кольца в рассматриваемой точке. Производная этого угла вдоль деформированного кольца, обозначаемая через Φ' , характеризует кривизну деформированного кольца в этой точке. Напряжения изгиба в кольце возникают при изменении его кривизны, определяемой формулой $\Phi' - \Phi'_0$, где Φ'_0 обозначает производную от Φ в рассматриваемой точке для недеформированного кольца. Плотность потенциальной энергии поэтому может быть записана в виде

$$П = 1/2 EI (\Phi' - \Phi'_0)^2. \quad (12.3)$$

Следовательно, плотность функции Лагранжа выражается как

$$L(\theta, r, \dot{r}, \Phi') = 1/2 \{S\rho [\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} + \Omega)^2] - EI (\Phi' - \Phi'_0)^2\}. \quad (12.4)$$

Переменная Φ не является обобщенной координатой и должна быть выражена через r и θ . Угол между направлением радиус-вектора в данной точке кривой и нормально к кривой в этой точке (на рис. 18 — угол α) определяется как

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}.$$

Следовательно,

$$\Phi = \theta - \text{arctg} \left(\frac{1}{r} \frac{r'}{\theta'} \right). \quad (12.5)$$

Перепишывая связь (12.4) в форме

$$f(\theta', r, r') = 1/2 [(r')^2 + (r\theta')^2 - 1] = 0, \quad (12.6)$$

воспользуемся вариационным принципом Гамильтона для составления уравнений движения кольца. Минимизируемый функционал есть действие по Гамильтону:

$$H = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} [L(\theta, r, \dot{r}, \Phi') - \lambda f(\theta', r, r')] dt ds, \quad (12.7)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа (функция s и t).

Вариации функционала

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} & \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \delta \Phi' - \right. \\ & \left. - \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta'} \delta \theta' - \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \delta r - \lambda \frac{\partial f}{\partial r'} \delta r' \right) dt ds. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Как и в параграфе 2, интегрируя по частям, сводим вариации $\delta \theta$, $\delta \dot{r}$, $\delta \Phi'$, $\delta \theta'$, $\delta r'$ к $\delta \theta$, $\delta \Phi$, δr

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} & \left[\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial \theta'} \right) \right) \delta \theta + \left(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial r'} \right) \right) \delta r - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \delta \Phi \right] dt ds. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Вариацию $\delta\Phi$, которая не является независимой от вариаций $\delta\theta$ и δr , получаем из соотношения (12.5):

$$\delta\Phi = \delta\theta - \frac{(r\theta')^2}{(r\theta')^2 + r'^2} \delta\left(\frac{r'}{r\theta'}\right).$$

Или, учитывая уравнение связи (12.4), имеем

$$\delta\Phi = \delta\theta - r\theta'\delta r' + r'\theta'\delta r + rr'\delta\theta'. \quad (12.10)$$

Подставляя это соотношение в (12.9) и снова интегрируя по частям для исключения $\delta r'$ и $\delta\theta'$, находим

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial \theta'} \right) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{ds} \left(rr' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \right) \right] \delta\theta + \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial r'} \right) - \frac{d}{ds} \left(r\theta' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \right) - r'\theta' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \right] \delta r \right\} dt ds, \end{aligned}$$

откуда и следуют уравнения Лагранжа динамики тонкого кольца:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial \theta'} \right) + \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} - \frac{d}{ds} \left(rr' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial r'} \right) + \frac{d}{ds} \left(r\theta' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \right) + \\ + r'\theta' \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} = 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Эти уравнения совместно с уравнением связи (12.6) позволяют найти r , θ , λ как функции t и s .

Переменные r и θ будут характеризовать положение в системе xu точки кольца, отстоящей от некоторой помеченной его точки на расстоянии s , измеряемом вдоль изогнутой средней линии, в произвольный момент времени t . Коэффициент λ есть значение реакции связи (натяжение в кольце в точке с координатой s в момент времени t).

Подставляя в уравнения (12.11) выражения (12.4) и (12.6), получаем

$$\begin{aligned} S\rho \frac{d}{dt} [r^2(\dot{\theta} + \Omega)] - EI(\Phi - \Phi_0)'' + EI[r r'(\Phi - \Phi_0)']' - \\ - [\lambda r^2 \theta']' = 0, \\ S\rho \ddot{r} - S\rho r(\dot{\theta} + \Omega)^2 - EI[r\theta'(\Phi - \Phi_0)']' - \\ - EI r'\theta'(\Phi - \Phi_0)'' + \lambda r\theta'^2 - (\lambda r')' = 0. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Уравнения (12.12) представляют собой уравнения колебаний кольца с большими перемещениями, исходная недеформированная форма которого не обязательно имеет форму окружности.

В дальнейшем будем рассматривать круговое кольцо радиуса и для решения нелинейной системы (12.12) воспользуемся изло-

женным в параграфе 8 методом двух масштабов. Предварительно введем в уравнения (12.12) безразмерные переменные по формулам:

$$s^* = s/R, \quad r^* = r/R, \quad \lambda^* = \lambda R^2/EI, \\ t^* = \sqrt{EI/(\rho SR^4)} t, \quad \Omega^* = \Omega/\sqrt{EI/(\rho SR^4)}. \quad (12.13)$$

Заметим, что s^* совпадает с принятым выше обозначением угла φ для кругового кольца, t^* с τ и Ω^* с ω . Уравнения (12.12) приобретают вид

$$\frac{d}{dt} [r^2 (\dot{\theta} + \omega)] - (\Phi - \Phi_0)'' + [rr' (\Phi - \Phi_0)'']' - [\lambda r^2 \theta']' = 0, \\ \ddot{r} - r (\dot{\theta} + \omega)^2 - [r\theta' (\Phi - \Phi_0)''']' - \\ - r' \theta' (\Phi - \Phi_0)'' + \lambda r \theta'^2 - (\lambda r')' = 0. \quad (12.14)$$

Для упрощения записи здесь и далее мы опустим звездочки, однако под r и λ понимаем безразмерные переменные.

Решение уравнений (12.14) будем искать в виде рядов

$$r = 1 + \varepsilon r_1(\varphi, \tau_0, \tau_2) + \varepsilon^2 r_2(\varphi, r_0, \tau_2) + \dots, \\ \theta = \varphi + \varepsilon \theta_1(\varphi, \tau_0, \tau_2) + \varepsilon^2 \theta_2(\varphi, \tau_0, \tau_2) + \dots, \quad (12.15) \\ \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varphi, \tau_0, \tau_2) + \varepsilon^2 \lambda_2(\varphi, \tau_0, \tau_2) + \dots \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Здесь, как и в параграфе 8, τ_0 и τ_2 — «быстрое» и «медленное» время:

$$\tau_0 = (1 + \omega_3 \varepsilon^3 + \dots) \tau, \quad \tau_2 = \varepsilon^2 \tau.$$

В уравнениях (12.14) присутствует переменная Φ , которая с учетом соотношений (12.5) и (12.15) представляется в виде

$$\Phi = \varphi + \varepsilon (\theta_1 - r_1') + \varepsilon^2 (\theta_2 - r_2' + r_1 r_1' + r_1' \theta_1') + \dots \quad (12.16)$$

Подставляя ряды (12.15) и (12.16) в уравнения (12.14) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем уравнения: уравнение нулевого приближения, соответствующее членам с ε^0 :

$$\lambda_0 = \omega^2, \quad (12.17)$$

уравнения первого приближения, соответствующие членам с ε^1 :

$$\ddot{r}_1 - \ddot{r}_1 + 4\omega \dot{r}_1' + r_1^{\text{VI}} + 2r_1^{\text{IV}} + r_1'' - \omega^2 (r_1^{\text{IV}} + 3r_1'') = 0, \quad (12.18)$$

$$\theta_1' = -r_1, \quad (12.19)$$

$$\lambda_1 = -\ddot{r}_1 - r_1^{\text{IV}} - r_1'' + 2\omega \dot{\theta}_1 + \omega^2 (r_1'' + 2r_1), \quad (12.20)$$

уравнения второго приближения, соответствующие членам с ε^2 :

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_2 + 4\omega \dot{r}_2' + r_2^{\text{VI}} + 2r_2^{\text{IV}} + r_2'' - \omega^2 (r_2^{\text{IV}} + 3r_2'') = \\ = (\theta_2' + r_2)^{\text{IV}} + (\theta_2' + r_2)'' + (\lambda_1 r_1')''' + 2(\lambda_1 r_1)'' - \lambda_0 (\theta_2' + r_2)'' + \\ + 2\omega (\theta_2' + \dot{r}_2)' + (\dot{\theta}_1^2)'' + 2\omega (r_1 \dot{\theta}_1)'' - \omega \left(\frac{\partial r_1^2}{\partial \tau_0} \right)' - (\theta_2' + \ddot{r}_2) - \\ - 2 \frac{\partial}{\partial \tau_0} (r_1 \dot{\theta}_1)' \quad (12.21)$$

$$\theta_2' + r_2 = r_1^2 - \frac{1}{2} r_1'^2,$$

$$\lambda_2 = -(r_2' - \theta_2)''' - r_1'(r_1'' + r_1)' + (\lambda_1 r_1' + \lambda_0 r_2')' - \lambda_0 \theta_2' + \\ + \frac{1}{2} \lambda_0 r_1'^2 - \lambda_1 \theta_1' - \ddot{r}_2 + 2\omega \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 + \omega^2 r_2 + 2\omega r_1 \dot{\theta}_1,$$

уравнения третьего приближения, соответствующие членам с ε^3 :

$$\ddot{r}_3'' - \ddot{r}_3 + 4\omega \dot{r}_3' + r_3^{\text{VI}} + 2r_3^{\text{IV}} + r_3'' - \omega^2 (r_3^{\text{IV}} + 3r_3'') = \\ = (\theta_3' + r_3)^{\text{IV}} + (\theta_3' + r_3)'' - \left[r_1' \left(r_1'' - \frac{1}{2} r_1'^2 \right) \right]''' + \\ + 2 [r_1' r_1 (r_1'' + r_1)']' - \left[r_1' \left(r_1'' + \frac{1}{2} r_1' r_1''' \right) \right]' + (\lambda_1 r_2' + \lambda_2 r_1')''' - \\ - \lambda_0 (\theta_3' + r_3)'' + 2 (\lambda_2 r_1)'' + [\lambda_1 (r_2 - \theta_2)']' - (\lambda_0 r_1 r_1')'' - (12.22) \\ - 2 \frac{\partial r_1''}{\partial \tau_2} + 2 \frac{\partial r_1'}{\partial \tau_2} - 4\omega \frac{\partial r_1'}{\partial \tau_2} + [2\theta_1 \dot{\theta}_2 + 2\omega r_1 \dot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_1^2 + \\ + 2\omega r_2 \dot{\theta}_1]'' + 2\omega (\dot{\theta}_3' + \dot{r}_3)' - (\dot{\theta}_3' + \ddot{r}_3) - \left[2\omega \frac{\partial}{\partial \tau_0} (r_1 r_2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tau_0} (r_1^2 \dot{\theta}_1) + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_0} (r_2 \dot{\theta}_1) + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_0} (r_1 \dot{\theta}_2) \right]',$$

$$\theta_3' + r_3 = -r_1' r_2' + r_1 r_2 - r_1 \theta_2'.$$

Точками здесь обозначено дифференцирование по τ_0 .

Как известно, в нелинейных системах эффект изменения частоты обычно улавливается лишь в третьем приближении. Именно поэтому медленное время в данной задаче выбрано в виде $\tau_2 = \varepsilon^2 \tau_0$. По этой же причине и выписаны полностью уравнения трех приближений.

В нулевом приближении мы получили, что в соответствии с формулой (12.17) натяжение кольца определяется центробежной силой. Этот же результат был получен и в параграфе 2. В первом приближении уравнение (12.18) представляет собой уравнение линейных колебаний кольца, полученное уже в параграфах 1, 2. В соответствии с разложениями (12.15) r_1 — нормированное приращение радиуса, которое связано с использованием ранее обозначением w : $\varepsilon r_1 = -w/R$. Аналогично $\varepsilon \theta_1 = v/R$. Таким образом, уравнение (12.19) представляет собой условие нерастяжимости (1.4). Уравнение (12.20) после решения уравнения (12.18) позволяет определить закон изменения натяжения кольца во времени и пространстве.

В соответствии с методом двух масштабов получаем решение уравнений первого приближения, полагая постоянные интегрирования зависящими от медленного времени τ_2 , в виде

$$r_1 = A(\tau_2) \cos(k\varphi + \omega_1 \tau_0 + \alpha(\tau_2)) + B(\tau_2) \cos(k\varphi + \\ + \omega_2 \tau_0 + \beta(\tau_2)), \quad (12.23)$$

где

$$\omega_{1,2} = k/(k^2 + 1)[2\omega \pm (k^2 - 1)\sqrt{k^2 + 1 + \omega^2}]. \quad (12.24)$$

В этих выражениях составляющая $2k\omega/(k^2 + 1)$ характеризует скорость прецессии стоячей волны, полученную в главе III. Поправки $\alpha(\tau_2)$ и $\beta(\tau_2)$ должны показать, как искажается такое выражение для скорости с учетом нелинейных явлений.

Функции $A(\tau_2)$, $B(\tau_2)$, $\alpha(\tau_2)$, $\beta(\tau_2)$ пока неизвестны и должны быть определены из уравнений следующих приближений. Подставляя r_1 , θ_1 , λ_1 в уравнения второго приближения (12.24), с учетом соотношений (12.23), (12.19) и (12.20), получаем линейные неоднородные уравнения для r_2 , θ_2 , λ_2 . Частное решение, соответствующее чисто вынужденным колебаниям, имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= R_1 A^2 \cos 2[k\varphi + \omega_1 \tau_0 + \alpha(\tau_0)] + R_2 AB \cos [2k\varphi + \\ &+ (\omega_1 + \omega_2)\tau_0 + \alpha + \beta] + R_3 AB \cos [(\omega_1 - \omega_2)\tau_0 + \alpha - \beta] + \\ &+ R_4 B^2 \cos 2(k\varphi + \omega_2 \tau_0 + \beta) + R_5 (A^2 + B^2), \\ \theta_2 &= \Theta_1 A^2 \sin 2(k\varphi + \omega_1 \tau_0 + \alpha) + \Theta_2 AB \sin [2k\varphi + (\omega_1 + \\ &+ \omega_2)\tau_0 + \alpha + \beta] + \Theta_3 AB \sin [(\omega_1 - \omega_2)\tau_0 + \alpha - \beta] + \\ &+ \Theta_4 B^2 \sin 2(k\varphi + \omega_2 \tau_0 + \beta), \end{aligned} \quad (12.25)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \Lambda_1 A^2 \cos 2(k\varphi + \omega_1 \tau_0 + \alpha) + \Lambda_2 AB \cos [2k\varphi + (\omega_1 + \\ &+ \omega_2)\tau_0 + \alpha + \beta] + \Lambda_3 AB \cos [(\omega_1 - \omega_2)\tau_0 + \alpha - \beta] + \\ &+ \Lambda_4 B^2 \cos (2k\varphi + \omega_2 \tau_0 + \beta) + \Lambda_5 (A^2 + B^2). \end{aligned}$$

Свободные колебания с произвольными постоянными, зависящими от медленного времени, здесь опущены, поскольку мы предполагаем ограничиться решением уравнений третьего приближения. Выражения коэффициентов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$ приведены в приложении к этому параграфу.

При подстановке решений уравнений первого и второго приближения в уравнения третьего приближения (12.22) появляются слагаемые вида (12.23), приводящие к резонансу и возникновению в решении секулярных членов, неограниченно растущих по времени. По методу двух масштабов требуется, чтобы коэффициенты при этих членах были обращены в нуль, что и приводит к уравнениям относительно неизвестных $A(\tau_2)$, $B(\tau_2)$, $\alpha(\tau_2)$, $\beta(\tau_2)$

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial A}{\partial \tau_2} &= 0, \quad \alpha_0 \frac{dB}{d\tau_2} = 0, \\ \alpha_0 \frac{d\alpha}{d\tau_2} + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 B^2 &= 0, \\ -\alpha_0 \frac{d\beta}{d\tau_2} + \alpha_3 B^2 + \alpha_2 A^2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Формулы для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ приведены в приложении.

Решение уравнений (12.26) свидетельствует о том, что, как это и бывает в консервативных системах, амплитуды A и B являются произвольными постоянными, а скорость изменения фаз приобре-

тает зависящую от значения амплитуд поправку:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\tau_2} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} A^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} B^2 \\ \frac{d\beta}{d\tau_2} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_0} A^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} B^2.\end{aligned}$$

Возвращаясь к «быстрому» времени τ , переписываем эти соотношения в форме

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\alpha_1/\beta_0 (\varepsilon A)^2 - \alpha_2/\alpha_0 (\varepsilon B)^2, \\ \dot{\beta} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_0} (\varepsilon A)^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} (\varepsilon B)^2.\end{aligned}\quad (12.27)$$

В соответствии с формулами замены (12.15) величины εA и εB представляют собой нормированные на радиус кольца амплитуды колебаний кольца:

$$\varepsilon A = a, \quad \varepsilon B = b.$$

С учетом этого выражения для поправок к скоростям изменения фаз (12.27) окончательно принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} a^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} b^2, \\ \dot{\beta} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_0} a^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} b^2.\end{aligned}\quad (12.28)$$

Учитывая соотношения (12.15) и (12.23), находим решение по интересующей нас переменной r :

$$\begin{aligned}r &= 1 + a \cos \left[k\varphi + \omega_1\tau - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} a^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} b^2 \right) \tau \right] + \\ &+ b \cos \left[k\varphi + \omega_2\tau + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0} a^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} b^2 \right) \tau \right].\end{aligned}\quad (12.29)$$

Здесь τ_0 заменено на τ и не представляющие интереса начальные значения фаз α и β опущены. При $a = b$ выражение (12.29) приводится к форме, отражающей прецессию стоячей волны:

$$\begin{aligned}r &= 1 + 2a \left[k\varphi + \frac{1}{2} \left(\omega_1 + \omega_2 + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_0} a^2 \right) \tau \right] \times \\ &\times \cos \frac{1}{2} \left[\left(\omega_1 - \omega_2 - \frac{2\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_0} a^2 \right) \tau \right].\end{aligned}$$

Скорость прецессии стоячей волны с учетом формул (12.24) определяется выражением

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\omega}{k^2 + 1} - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2k\alpha_0} a^2.\quad (12.30)$$

Для измененной частоты колебаний волны получается формула

$$\mu = \frac{k(k^2 - 1)}{k^2 + 1} \sqrt{k^2 + 1 + \omega^2} - \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{2\alpha_0} a^2.\quad (12.31)$$

Таблица
Коэффициент $\Gamma(\omega, k) = (\alpha_3 - \alpha_1)/2k\alpha_0$

ω	$\Gamma(\omega, 2)$	$\Gamma(\omega, 3)$	$\Gamma(\omega, 4)$	$\Gamma(\omega, 5)$
0,01	$2,1667 \cdot 10^{-4}$	$7,2979 \cdot 10^{-4}$	$1,1035 \cdot 10^{-3}$	$1,3354 \cdot 10^{-3}$
0,02	$4,3339 \cdot 10^{-4}$	$1,4597 \cdot 10^{-3}$	$2,2070 \cdot 10^{-3}$	$2,6708 \cdot 10^{-3}$
0,03	$6,5019 \cdot 10^{-4}$	$2,1897 \cdot 10^{-3}$	$3,3107 \cdot 10^{-3}$	$4,0064 \cdot 10^{-3}$
0,04	$8,6712 \cdot 10^{-4}$	$2,9199 \cdot 10^{-3}$	$4,4146 \cdot 10^{-3}$	$5,3421 \cdot 10^{-3}$
0,05	$1,0842 \cdot 10^{-3}$	$3,6505 \cdot 10^{-3}$	$5,5188 \cdot 10^{-3}$	$6,6781 \cdot 10^{-3}$
0,06	$1,3015 \cdot 10^{-3}$	$4,3815 \cdot 10^{-3}$	$6,6234 \cdot 10^{-3}$	$8,0144 \cdot 10^{-3}$
0,07	$1,5191 \cdot 10^{-3}$	$5,1129 \cdot 10^{-3}$	$7,7284 \cdot 10^{-3}$	$9,3510 \cdot 10^{-3}$
0,08	$1,7370 \cdot 10^{-3}$	$5,8449 \cdot 10^{-3}$	$8,8339 \cdot 10^{-3}$	$1,0688 \cdot 10^{-2}$
0,09	$1,9552 \cdot 10^{-3}$	$6,5775 \cdot 10^{-3}$	$9,9399 \cdot 10^{-3}$	$1,2026 \cdot 10^{-2}$
0,1	$2,1738 \cdot 10^{-3}$	$7,3108 \cdot 10^{-3}$	$1,1047 \cdot 10^{-2}$	$1,3364 \cdot 10^{-2}$
0,2	$4,3904 \cdot 10^{-3}$	$1,4700 \cdot 10^{-2}$	$2,2166 \cdot 10^{-2}$	$2,6786 \cdot 10^{-2}$
0,3	$6,6920 \cdot 10^{-3}$	$2,2245 \cdot 10^{-2}$	$3,3431 \cdot 10^{-2}$	$4,0326 \cdot 10^{-2}$
0,4	$9,1199 \cdot 10^{-3}$	$3,0024 \cdot 10^{-2}$	$4,4913 \cdot 10^{-2}$	$5,4043 \cdot 10^{-2}$
0,5	$1,1714 \cdot 10^{-2}$	$3,8113 \cdot 10^{-2}$	$5,6685 \cdot 10^{-2}$	$6,7994 \cdot 10^{-2}$
0,6	$1,4513 \cdot 10^{-2}$	$4,6588 \cdot 10^{-2}$	$6,8818 \cdot 10^{-2}$	$8,2239 \cdot 10^{-2}$
0,7	$1,7553 \cdot 10^{-2}$	$5,5524 \cdot 10^{-2}$	$8,1384 \cdot 10^{-2}$	$9,6836 \cdot 10^{-2}$
0,8	$2,0867 \cdot 10^{-2}$	$6,4992 \cdot 10^{-2}$	$9,4454 \cdot 10^{-2}$	$1,1184 \cdot 10^{-1}$
0,9	$2,4487 \cdot 10^{-2}$	$7,5065 \cdot 10^{-2}$	$1,0810 \cdot 10^{-1}$	$1,2732 \cdot 10^{-1}$
1	$2,8440 \cdot 10^{-2}$	$8,5812 \cdot 10^{-2}$	$1,2238 \cdot 10^{-1}$	$1,4332 \cdot 10^{-1}$
2	$9,0202 \cdot 10^{-2}$	$2,4380 \cdot 10^{-1}$	$3,1525 \cdot 10^{-1}$	$3,4468 \cdot 10^{-1}$
3	$1,9413 \cdot 10^{-1}$	0,5255	$6,4074 \cdot 10^{-1}$	$6,5900 \cdot 10^{-1}$
4	$3,3015 \cdot 10^{-1}$	0,950	1,1464	1,1353
5	$4,8488 \cdot 10^{-1}$	1,7265	1,8618	1,8144

Зависимость коэффициента при a^2 в формуле (12.30) от величины угловой скорости ω и номера формы k приведена в таблице. Графически эти зависимости изображены на рис. 19, 20.

Пример. Пусть амплитуда колебаний кольца равна 0,01 радиуса кольца $a = 0,01$. Угловая скорость $\omega = 0,01$ (т. е. угловая скорость в размерном времени (Ω) составляет 0,01 от $\kappa = \sqrt{EI/(\rho SR^4)}$). Тогда наличие нелинейности приведет к изменению скорости прецессии волны на величину, равную

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2k\alpha_0} a^2 = 2,1667 \cdot 10^{-8} \quad (k = 2)$$

или в размерных переменных (принимая $\kappa \approx 10^3$ 1/ч)

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2k\alpha_0} a^2 \kappa = 2,1667 \cdot 10^{-8} \kappa = 4,48 \text{ }^\circ/\text{ч.}$$

Система съема информации будет интерпретировать как «уход», то приращение скорости прецессии волны, которое произойдет

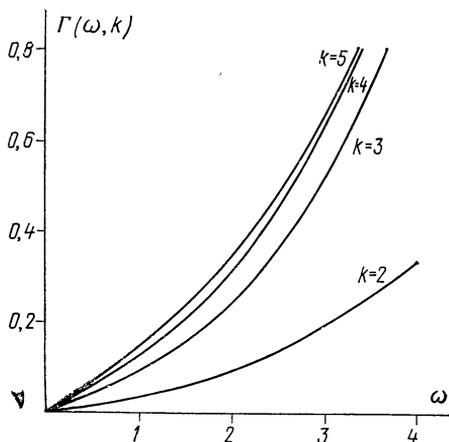


Рис. 19

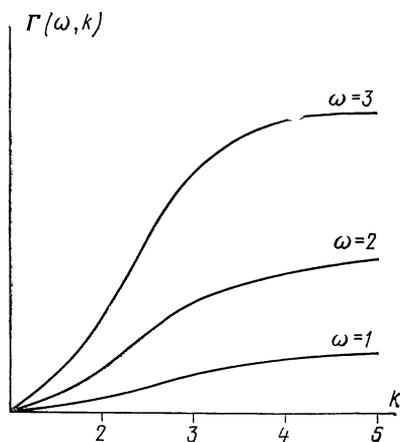


Рис. 20

при случайном изменении амплитуды колебаний Δa ,

$$\Delta\dot{\phi} = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1) a \kappa}{k \alpha_0} \Delta a.$$

Принимая в рассматриваемом примере $\Delta a = 0,01 a$, получим оценку «ухода» из-за наличия нелинейности и неустойчивости амплитуды:

$$\Delta\dot{\phi} = 8,96 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{ч}.$$

Введенные в формулах (12.25) и (12.26) коэффициенты выражаются через исходные параметры:

$$R_1 = [(2 + k^2) k^2 (4k^2 - 1) + 4k^2 (k^2 - 1) N_1 + \omega^2 (2 + k^2) k^2 + 2\omega\omega_1 k (1 - k^2) + \omega_1^2 (k^2 - 4)] [-64k^6 + 32k^4 - 4k^2 - \omega^2 (16k^4 - 12k^2) - 16k\omega\omega_1 + 4\omega_1^2 (1 + 4k^2)]^{-1},$$

$$R_2 = [2(2 + k^2) k^2 (4k^2 - 1) + 4k^2 (k^2 - 1) (N_1 + N_2) + 2\omega^2 (2 + k^2) k^2 + 2\omega(\omega_1 + \omega_2) k (1 - k^2) + (\omega_1 + \omega_2)^2 (k^2/2 - 1) - 4\omega_1\omega_2] [-64k^6 + 32k^4 - 4k^2 - \omega^2 (16k^4 - 12k^2) - 8k\omega(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_1 + \omega_2)^2 (1 + 4k^2)]^{-1},$$

$$R_3 = (2 - k^2)/2,$$

$$R_4 = [(2 + k^2) k^2 (4k^2 - 1) + 4k^2 (k^2 - 1) N_2 + \omega^2 (2 + k^2) k^2 + 2\omega\omega_2 k (1 - k^2) + \omega_2^2 (k^2 - 4)] [-64k^6 + 32k^4 - 4k^2 - \omega^2 (16k^4 - 12k^2) - 16k\omega\omega_2 + 4\omega_2^2 (1 + 4k^2)]^{-1},$$

$$R_5 = (2 - k^2)/4, \quad \Theta_1 = (k^2 + 2 - 4R_1)/8k,$$

$$\Theta_2 = (k^2 + 2 - 2R_2)/4k, \quad \Theta_3 = [(\omega_1 + \omega_2)/k - \omega(1 + 2R_3)]/(\omega_1 - \omega_2),$$

$$\Theta_4 = (k^2 + 2 - 4R_4)/8k,$$

$$\Lambda_1 = -(2kR_1 + \Theta_1) 2k (4k^2 + \omega^2) + (1 - k^2) k^2/2 + \\ + N_1(1/2 - k^2) + \omega^2 (R_1 - k^2/4) + \omega_1^2 (4R_1 + 1/2k^2) + \\ + \omega\omega_1(4\Theta_1 - 1/k),$$

$$\Lambda_2 = -(2kR_2 + \Theta_2) 2k (4k^2 + \omega^2) + (1 - k^2)k^2 + \\ + (N_1 + N_2)(1/2 - k^2) + \omega^2 (R_2 - k^2/2) + (\omega_1 + \omega_2)^2 R_2 + \\ + \omega (\omega_1 + \omega_2) (2\Theta_2 - 1/k) + \omega_1\omega_2/k^2,$$

$$\Lambda_3 = (k^2 - 1)k^2 + \omega^2(R_3 + k^2/2) + (N_1 + N_2)/2 + \\ + (\omega_1 - \omega_2)^2 R_3 + 2\omega (\omega_1 - \omega_2)\Theta_3 + \omega_1\omega_2/k^2 - \omega/k (\omega_1 + \\ + \omega_2),$$

$$\Lambda_4 = -(2kR_4 + \Theta_4) 2k (4k^2 + \omega^2) + (1 - k^2)k^2/2 + \\ + N_2(1/2 - k^2) + \omega^2 (R_4 - k^2/4) + \omega_2^2 (4R_4 + 1/2k^2) + \\ + \omega\omega_2(4\Theta_4 - 1/k),$$

$$\Lambda_5 = (k^2 - 1)k^2/2 + \omega^2 k^2/4 + N_1/2 + \omega_1^2/2k^2 + \omega^2 R_5 - \omega\omega_1/k,$$

где

$$N_1 = -k^2(k^2 - 1) - \omega^2(k^2 - 2) + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1/k,$$

$$N_2 = -k^2(k^2 - 1) - \omega^2(k^2 - 2) + \omega_2^2 - 2\omega\omega_2/k,$$

константы α_0 , α_1 , α_2 и α_3 имеют вид

$$\alpha_0 = 4\omega k - 2(k^2 + 1)\omega_1 = -4\omega k + 2(k^2 + 1)\omega_2,$$

$$\alpha_1 = [R_1 (1 - 2k^2)/2 + R_5 - k\Theta_1](k^4 - k^2 + \omega^2 k^2 - 2\omega k\omega_1 + \\ + \omega_1^2) - k^6(2k^2 - 3)/8 + (k^2 - 1)k^4/2 - k^6/8 + k^4 N_1 R_1 + \\ + k^4 (2\Lambda_5 - \Lambda_1)/2 - k^2(\Lambda_1 + 2\Lambda_5) - k^2 [N_1(R_1 - 2k\Theta_1) + \\ + 2N_1 R_5]/2 + \omega^2 k^4/4 + 2k\omega_1\Theta_1(2\omega_1 - k\omega) - 3\omega_1^2/2 + \\ + (R_1 + 2R_5)\omega_1(2k\omega - \omega_1),$$

$$\alpha_2 = [R_2(1 - 2k^2)/2 + R_5 - k\Theta_2 + R_3/2](k^4 - k^2 + \omega^2 k^2 - \\ - 2\omega k\omega_1 + \omega_1^2) - k^6(k^2 - 3/2)/2 + (k^2 - 1)k^4 - k^6/4 + \\ + k^4 N_2 R_2 + k^4(2\Lambda_5 - \Lambda_2 + \Lambda_3)/2 - k^2(2\Lambda_5 + \Lambda_2 + \Lambda_3) + \\ + \omega^2 k^4/2 - k^2[2R_5 N_1 + N_2(R_2 + R_3 - 2n\Theta_2)]/2 + \\ + k (\omega_1 - \omega_2) \Theta_3(\omega_2 - \omega k + \omega_1) + k (\omega_1 + \omega_2) \Theta_2(\omega_2 - \\ - \omega k + \omega_1) - (\omega_2^2 + 4\omega_1\omega_2 + \omega_1^2)/2 + (\omega k - \omega_1) (2R_5\omega_1 + \\ + R_2\omega_2 + R_3\omega_2) + \omega k\omega_1 (2R_5 + R_2 + R_3),$$

$$\alpha_3 = [R_4(1 - 2k^2)/2 + R_5 - k\Theta_4](k^4 - k^2 + \omega^2 k^2 - 2\omega k\omega_2 + \\ + \omega_2^2) - k^6(2k^2 - 3)/8 + (k^2 - 1)k^4/2 - k^6/8 + k^4 N_2 R_4 + \\ + k^4(2\Lambda_5 - \Lambda_4)/2 + k^2(\Lambda_4 + 2\Lambda_5) - k^2[N_2(R_4 - 2k\Theta_4) + \\ + 2R_5 N_2]/2 + \omega^2 k^4/4 + 2k\omega_2\Theta_4(2\omega_2 - k\omega) - 3\omega_2^2/2 + \\ + (R_4 + 2R_5)\omega_2 (2k\omega - \omega_2).$$

Если ограничиться рассмотрением только низшей формы колебаний $k = 2$ и считать ω величиной малой, т. е. пренебречь во всех

выражениях членами с ω^2 , то формулу (12.30) можно записать:

$$\phi = -\omega \left(\frac{2}{5} + 0,02167a^2 \right).$$

Таким образом, все нелинейные эффекты в рассматриваемой консервативной системе исчерпываются поправками к скорости прецессии волны и частоте колебаний волны, которые даются формулами (12.30) и (12.31). Других нелинейных эффектов типа явления «захвата» в лазерных гироскопах здесь нет.

13

Динамика полусферического резонатора

В параграфе показывается, что свойство инертности упругих волн, установленное для кольцевого резонатора в параграфе 11 и связанное с существованием оператора (11.24), имеет место и для полусферического резонатора, представляющего собой полусферическую оболочку. Задавая на рис. 21 направление компонент u , v , w вектора перемещений оболочки, выпишем уравнения резонатора в форме уравнений В. В. Новожилова [7]:

$$\begin{aligned} \Delta U + 2U &= -(1 - \nu^2)[F_1(\theta, \varphi) + F_2(\theta, \varphi)], \\ \Delta V + 2V &= F_3(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 w + 2\Delta w + 12(1 - \nu^2)(R^2/h^2)w &= 12(1 + \nu)(R^2/h^2)U + \\ &+ 12(1 - \nu)^2(R^2/h^2)F_1. \end{aligned}$$

В этих уравнениях функции U и V связаны с искомыми перемещениями u , v , w :

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - (1 + \nu)w, \\ V &= \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Через Δ обозначен оператор Лапласа в сферических координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

R — радиус сферы, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, θ и φ — сферические координаты.

Функции $F_1(t, \theta, \varphi)$, $F_2(t, \theta, \varphi)$, $F_3(t, \theta, \varphi)$ выражаются через проекции на оси u , v , w удельной нагрузки $X(t, \theta, \varphi)$, $Y(t, \theta, \varphi)$, $Z(t, \theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} F_1(t, \theta, \varphi) &= \frac{R^2}{Eh} Z(t, \theta, \varphi), \\ F_2(t, \theta, \varphi) &= \frac{R^2}{Eh} \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} + X \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right), \\ F_3(t, \theta, \varphi) &= -2(1 + \nu) \frac{R^2}{Eh} \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + Y \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Как и ранее, E — модуль Юнга.

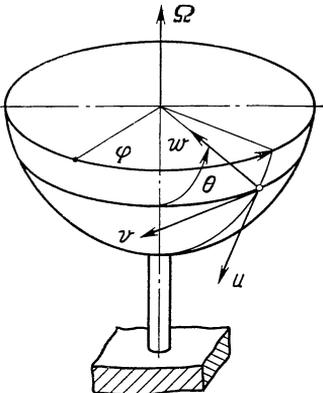


Рис. 21

Система (13.4) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых перемещений поверхности $u(t, \theta, \varphi)$, $v(t, \theta, \varphi)$, $w(t, \theta, \varphi)$. К ней требуется присоединить граничные условия. С этой целью приведем также формулы, связывающие внутренние усилия и моменты с деформациями срединной поверхности сферической оболочки: растягивающие усилия

$$\begin{aligned} T_1 &= Eh/(1 - \nu^2)(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ T_2 &= Eh/(1 - \nu^2)(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{aligned} \quad (13.4)$$

перерезывающие усилия

$$S_1 = -S_2 = (Eh/(2(1 + \nu))\chi_3, \quad (13.5)$$

изгибающие моменты

$$\begin{aligned} G_1 &= -D [\chi_1 + \nu\chi_2 + (1/R)(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)], \\ G_2 &= -D [\chi_2 + \nu\chi_1 + (1/R)(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)], \end{aligned} \quad (13.6)$$

крутящие моменты

$$H_1 = -H_2 = D(1 - \nu)\tau, \quad D = Eh^3/12(1 - \nu^2). \quad (13.7)$$

В этих формулах для сферической оболочки использованы соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - w \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta - w \right), \quad (13.8)$$

представляющие линейные растяжения;

$$\chi_3 = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad (13.9)$$

представляющее сдвиговую деформацию;

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \quad \chi_2 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta \right), \end{aligned} \quad (13.10)$$

представляющие изгибные деформации;

$$\tau = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad (13.11)$$

представляющее деформацию кручения.

Силы, фигурирующие в (13.3), задаются выражениями:

$$X = -h\rho (\ddot{u} - 2\Omega \dot{v} \cos \theta - \dot{\Omega}v \cos \theta),$$

$$Y = -h\rho [\dot{v} + 2\Omega (\dot{w} \sin \theta + \dot{u} \cos \theta) - (R - w) \dot{\Omega} \sin \theta + \dot{\Omega} u \cos \theta],$$

$$Z = -h\rho (\ddot{w} - 2\Omega v \sin \theta - \dot{\Omega}v \sin \theta). \quad (13.12)$$

Угловая скорость вращения оболочки $\Omega(t)$ считается произвольной заданной функцией времени и направленной по оси симметрии оболочки.

Уравнения (13.1) с учетом соотношений (13.12) и (13.3) записываются в форме

$$\begin{aligned} \Delta U + 2U &= \mu \left[\dot{U} + (2 + \nu) \ddot{w} - 2\Omega \dot{V} \cos \theta + 2\Omega \dot{w}' - \right. \\ &\quad \left. - \dot{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta + v \cos \theta \operatorname{ctg} \theta - w' - u' \operatorname{ctg} \theta \right) \right], \\ \Delta V + 2V &= \frac{2\mu}{1 - \nu} \left[\ddot{V} - 2\Omega \dot{u} \sin \theta + 2\Omega \dot{U} \cos \theta + \right. \\ &\quad + (3 + \nu) 2\Omega \dot{w} \cos \theta + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \sin \theta + \dot{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta - \right. \\ &\quad \left. - 2(R - w) \cos \theta + v' \operatorname{ctg} \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta \right) \cos \theta - u \sin \theta \right], \end{aligned} \quad (13.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 w + 2\Delta w + 12(1 - \nu^2) \frac{R^2}{h^2} w &= 12(1 + \nu) \frac{R^2}{h^2} U - \\ &\quad - 12(1 - \nu^2) \frac{R^4 \rho}{E h^2} (\ddot{w} - 2\Omega \dot{v} \sin \theta - \dot{\Omega}v \sin \theta), \end{aligned}$$

$$\mu = (1 - \nu^2) \rho R^2 E^{-1}.$$

Анализ этой системы проведем способом, примененным в параграфе 11. Выпишем правые части уравнений (13.13), рассматриваемые на краю оболочки ($\theta = \pi/2$):

$$\Pi_1 = \mu [\dot{U} + (2 + \nu) \ddot{w} + 2\Omega \dot{w}' + \dot{\Omega} w'],$$

$$\Pi_2 = \frac{2\mu}{1 - \nu} \left[\ddot{V} - 2\Omega \dot{u} + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \dot{\Omega} u \right], \quad (13.14)$$

$$\Pi_3 = 12(1 + \nu) \frac{R^2}{h^2} U - 12(1 - \nu^2) \frac{R^4 \rho}{E h^2} (\ddot{w} - 2\Omega \dot{v} - \dot{\Omega} v).$$

Выполним замену независимой переменной $\varphi \rightarrow \psi$:

$$\psi = \varphi + \gamma(t), \quad (13.15)$$

где $\gamma(t)$ — подлежащая определению функция времени.

Используя обозначение $U(t, \theta, \varphi) \equiv \tilde{U}[t, \theta, \psi]$, находим

$$\dot{U} = \dot{\tilde{U}} + \dot{\gamma} \tilde{U}', \quad \ddot{U} = \ddot{\tilde{U}} + 2\dot{\gamma} \dot{\tilde{U}}' + \ddot{\gamma} \tilde{U}' + \dot{\gamma}^2 \tilde{U}'''. \quad (13.16)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по ψ . Аналогично дифференцируются и функции V , u , v , w .

Подставляя (13.16) в (13.14) и опуская для упрощения записи волну над буквой, находим

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \mu [\dot{U} + 2\dot{\gamma}\dot{U}' + \dot{\gamma}U' + \dot{\gamma}^2U'' + (2 + \nu)(\ddot{w} + 2\dot{\gamma}\dot{w}' + \dot{\gamma}w' + \\
 &\quad + \dot{\gamma}^2w'') + 2\Omega(\dot{w}' + \dot{\gamma}w'') + \dot{\Omega}w'], \\
 \Pi_2 &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[\dot{V} + 2\dot{\gamma}\dot{V}' + \dot{\gamma}V' + \dot{\gamma}^2V'' - 2\Omega(\dot{u} + \dot{\gamma}u') + \right. \\
 &\quad \left. + 2\Omega\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta} + \dot{\gamma}\frac{\partial w'}{\partial\theta}\right) + \dot{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - u\right) \right], \\
 \Pi_3 &= 12(1 + \nu)\frac{R^2}{h^2}U - 12(1 - \nu^2)\frac{R^4\rho}{Eh^2}[\ddot{w} + 2\dot{\gamma}\dot{w}' + \dot{\gamma}w' + \\
 &\quad + \dot{\gamma}^2w'' - 2\Omega(\dot{v} + \dot{\gamma}v') - \dot{\Omega}v].
 \end{aligned} \tag{13.17}$$

Если бы нам удалось обратить в нуль выражения

$$\begin{aligned}
 2\dot{\gamma}\dot{U}' + \dot{\gamma}U' + 2(2 + \nu)\dot{\gamma}\dot{w}' + (2 + \nu)\dot{\gamma}w' + 2\Omega\dot{w}' + \dot{\Omega}w' &= 0, \\
 2\dot{\gamma}\dot{V}' + \dot{\gamma}V' - 2\Omega\dot{u} + 2\Omega\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta} + \dot{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - u\right) &= 0, \\
 2\dot{\gamma}\dot{w}' + \dot{\gamma}w' - 2\Omega\dot{v} - \dot{\Omega}v &= 0,
 \end{aligned} \tag{13.18}$$

то оставшаяся часть уравнений (13.13) имела бы самосопряженную форму (содержала бы только симметрические члены):

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \mu [\dot{U} + \dot{\gamma}^2U'' + (2 + \nu)\dot{\gamma}^2w'' + 2\Omega\dot{\gamma}w'], \\
 \Pi_2 &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[\dot{V} + \dot{\gamma}^2V'' - 2\Omega\dot{\gamma}u' + 2\Omega\dot{\gamma}\frac{\partial w'}{\partial\theta} \right], \\
 \Pi_3 &= 12(1 + \nu)\frac{R^2}{h^2}U - 12(1 - \nu^2)\frac{R^4\rho}{Eh^2}[\dot{w} + \dot{\gamma}^2w'' - 2\Omega\dot{\gamma}v'].
 \end{aligned} \tag{13.19}$$

а уравнения (13.1) допускали бы решения на границе оболочки в виде стоячей волны:

$$w(t, \pi/2, \psi) = f(t) \cos k\psi. \tag{13.20}$$

Это бы и означало то, что стоячая волна относительно оболочки прецессирует со скоростью $\dot{\gamma}(t)$, поскольку замена типа (13.15) характеризует переход к вращающейся системе координат.

Рассмотрим вначале первое и третье уравнения системы (13.18). Для их выполнения, очевидно, достаточно выполнения двух групп равенств:

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad &\begin{cases} \dot{\gamma}\dot{U} + (2 + \nu)\dot{\gamma}\dot{w} + \Omega\dot{w} = 0, \\ \dot{\gamma}\dot{w}' - \Omega\dot{v} = 0, \end{cases} \\
 \text{II} \quad &\begin{cases} \dot{\gamma}U + (2 + \nu)\dot{\gamma}w + \dot{\Omega}w = 0, \\ \dot{\gamma}w' - \dot{\Omega}v = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{13.21}$$

Воспользуемся теперь одним из граничных условий. Из равенства нулю растягивающего напряжения на границе T_1 вытекает, что

$$\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pi/2.$$

Обращаясь к формулам (13.8), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - w + v \frac{\partial v}{\partial \varphi} - vw = 0,$$

что в совокупности с формулами (13.2) дает

$$U = (1 - v)\partial v/\partial \varphi \quad \text{при} \quad \theta = \pi/2.$$

Подставляя U в первую группу уравнений (13.21), получаем

$$\dot{\gamma} (1 - v)\dot{v}' + [(2 + v)\dot{\gamma} + \Omega]\dot{w} = 0,$$

$$\dot{\gamma}\dot{w}' - \dot{\gamma}\Omega = 0.$$

Эти два уравнения сводятся к одному:

$$\dot{\gamma}^2 (1 - v)\dot{w}'' + \Omega [(2 + v)\dot{\gamma} + \Omega]\dot{w} = 0.$$

Поскольку функция w 2π -периодична по φ , то для тождественного выполнения этого равенства необходимо и достаточно, чтобы

$$-\dot{\gamma}^2(1 - v)k^2 + \Omega [(2 + v)\dot{\gamma} + \Omega] = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Отсюда

$$\gamma(t) = \frac{1}{2(1 - v)k^2} [(2 + v) \pm \sqrt{(2 + v)^2 + 4(1 - v)k^2}] \int_0^t \Omega(t) dt. \quad (13.22)$$

Уравнения второй группы (13.21) приводятся к виду

$$\dot{\gamma}^2(1 - v) w'' + \dot{\Omega} [(2 + v)\dot{\gamma} + \Omega] w = 0.$$

Условие периодичности приводит к уравнению

$$-\dot{\gamma}^2 (1 - v)k^2 + \dot{\Omega} [(2 + v)\dot{\gamma} + \Omega] = 0$$

с тем же самым решением (13.32). Таким образом, переопределенная система (13.21) оказывается совместной.

Рассмотрим второе уравнение системы (13.18), используя другие граничные условия. Так, из условия равенства нулю сдвигающего усилия S_1 (см. (13.5)) при $\theta = \pi/2$ получаем $\chi_3 = 0$, что с учетом соотношения (13.9) приводит к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

откуда с учетом формул (13.2) находим

$$V = -2 \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (13.23)$$

Это позволяет нам переписать второе уравнение системы (13.18) в виде

$$-4\dot{\gamma}\dot{u}'' - 2\dot{\gamma}u'' - 2\Omega\dot{u}' + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) = 0. \quad (13.24)$$

Равенство нулю крутящего момента H_1 см. (13.7) на краю оболочки ($\theta = \pi/2$) приводит к условию $\tau = 0$, что в совокупности с соотношением (13.11) дает уравнение

$$\partial w' / \partial \theta = 0.$$

Поскольку оно представляет собой тождество по t и по φ и так как нас интересуют лишь волны с равной нулю постоянной составляющей по φ , то из него следуют уравнения

$$\partial \dot{w} / \partial \theta = 0, \quad \partial w / \partial \theta = 0,$$

после чего соотношение (13.24) принимает вид

$$4\dot{\gamma}\ddot{u}'' + 2\dot{\gamma}u'' + 2\Omega\dot{u} + \dot{\Omega}u = 0.$$

Оно допускает лишь тривиальное решение $u \equiv 0$. Но такое решение и имеет место на самом деле на краю оболочки в случае начальных условий $u(t, \theta, \varphi)|_{t=0} = 0$, $\dot{u}(t, \theta, \varphi)|_{t=0} = 0$.

Итак, показано, что уравнения оболочки (13.13) допускают решение на краю оболочки в виде стоячей волны (13.20) во вращающейся относительно оболочки системе координат по закону (13.22). Это и есть искомый линейный интегральный оператор, являющийся аналогом соответствующего оператора в случае кольца, выражаемого формулой (11.24).³

Из формулы (13.22) видно, что получено два значения для угла прецессии волны:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2(1-\nu)k^2} [(2+\nu) + \sqrt{(2+\nu)^2 + 4(1-\nu)k^2}] \int_0^t \Omega(t) dt \quad (13.25)$$

и

$$\gamma(t) = \frac{1}{2(1-\nu)k^2} [(2+\nu) - \sqrt{(2+\nu)^2 + 4(1-\nu)k^2}] \int_0^t \Omega(t) dt. \quad (13.26)$$

По аналогии со случаем растяжимого кольца (параграф 10) прецессия первого типа (13.25) соответствует побочным колебаниям с высокой частотой, прецессия второго типа (13.26) — основным колебаниям с низкой частотой. Появление побочных колебаний объясняется, как и в случае кольца, растяжимостью оболочки.

Подставляя в формулу (13.26) $k = 2$ и $\nu = 0,17$ (материал оболочки — плавленый кварц), получаем

$$\gamma(t) = -0,312 \int_0^t \Omega(t) dt,$$

что соответствует повороту осей колебаний относительно оболочки на угол $28,1^\circ$ или относительно инерциального пространства на угол $61,9^\circ$ при повороте оболочки на угол 90° . В [18] приводится эксперимент, где обнаруживается поворот осей колебаний в

тех же условиях на угол 63° . Как видно, формула (13.26) описывает экспериментальный факт с высокой точностью. Заметим, что в процедуре, приведшей к установлению формул (13.25) и (13.26), имеется логический изъян. Условие обнуления несамосопряженной части оператора вдоль стоячей волны есть условие достаточное, но не необходимое для существования стоячей волны в некоторой вращающейся системе координат. Иными словами, может существовать такая стоячая волна, вдоль которой несамосопряженная часть (13.18) в нуль не обращается. Тогда соотношения, полученные из формул (13.18), будут противоречить решению оставшейся самосопряженной части уравнений. Проверка непротиворечивости и состояла бы в решении этой оставшейся части и подстановке решений в (13.18). Но именно чтобы избежать подробного решения весьма сложной системы (13.13), и был использован предложенный прием. Прекрасное соответствие формулы (13.26) эксперименту подтверждает эту формулу, но, к сожалению, ничего не доказывает. Эксперимент был проведен для $k = 2$; уже для $k = 3$ соответствие с формулой может быть плохим. Этот же прием, примененный в параграфе 11, для нерастяжимого кольца является совершенно строгим, поскольку в случае одной зависимой переменной w обращение вдоль стоячей волны несамосопряженной части оператора в нуль является условием необходимым и достаточным для существования такой волны.

Уже применение этого приема к растяжимому кольцу (параграф 10) наталкивается на указанные выше трудности. Поэтому и установление основного эффекта для растяжимого кольца было произведено методом осреднения, обеспечивающим известные гарантии точности. Эти соображения относительно кольца подсказывают путь обоснования результата (13.25). Действительно, если изгибные колебания оболочки осуществляются с практически пренебрежимой растяжимостью ее срединной поверхности, то модель оболочки при таких колебаниях близка к модели нерастяжимой оболочки Релея, для которой между переменными u , v , w имеются связи, аналогичные связи (1.4) в случае нерастяжимого кольца. Но именно наличие связи в нерастяжимом кольце и приводит к законности примененного приема вычисления скорости прецессии волнового поля. Известно, что для низших форм колебаний модели растяжимой и нерастяжимой оболочек действительно близки.

Изучаемые в этом параграфе уравнения могут быть рассмотрены методом осреднения, однако процедура осреднения для них крайне громоздка. Специалистам по динамике оболочек известно, что поведение полусферической оболочки в краевой области весьма близко к поведению кольца. Поэтому для многих задач, связанных с изучением динамики такой оболочки, кольцо служит хорошей моделью и может использоваться для установления основных динамических свойств полусферической оболочки.

Глава IV

ДИНАМИКА НЕИДЕАЛЬНОГО КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

14

Внутренняя диссипация материала и ее влияние на динамику резонатора

Одним из наиболее существенных факторов, отличающих рассмотренную в предыдущей главе идеальную ситуацию от реальной, является наличие диссипативных сил, приводящих к затуханию свободных колебаний кольца. Если затухание невелико, а режим работы кратковременный, то совершающее изгибные колебания кольцо можно использовать в качестве датчика инерциальной информации, не прибегая ни к каким специальным мерам поддержания колебаний, т. е. в режиме «выбега».

Будем исходить из уравнений равновесия кольца (1.9), (1.11), (1.12). Связь изгибающего момента с деформацией для кольца, обладающего внутренней диссипацией, получим, предполагая, что закон Гука в этом случае может быть видоизменен:

$$\sigma = E\varepsilon + \xi\dot{\varepsilon}. \quad (14.1)$$

Тем самым предполагается, что напряжения пропорциональны не только величинам относительных деформаций, но и скоростям их изменения во времени, коэффициент представляет собой аналог коэффициента трения.

Изгибающий момент при этом принимает вид

$$M = -\frac{EI}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\xi I}{R} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \varphi},$$

что приводит к следующим уравнениям динамики кольца:

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') + \xi_1(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') &= 0 \\ \xi_1 &= \xi I / (\rho R^4 S). \end{aligned}$$

Величина κ , как и ранее, определяется формулой (1.16). Члены, содержащие квадрат угловой скорости и производную от нее по времени Ω^2 , $\dot{\Omega}$, опущены, поскольку в дальнейшем мы будем учитывать лишь члены первого порядка малости.

Используя замены переменных (9.3), (9.4), выпишем уравнения, определяющие динамику основной формы колебаний кольца:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= {}^8/5 \Omega (b \sin \gamma t - n \cos \gamma t) \sin \gamma t - {}^{36}/5 \xi_1 (a \sin \gamma t - \\ &\quad - m \cos \gamma t) \sin \gamma t, \\ \dot{m} &= -{}^8/5 \Omega (b \sin \gamma t - n \cos \gamma t) \cos \gamma t + {}^{36}/5 \xi_1 (a \sin \gamma t - \\ &\quad - m \cos \gamma t) \cos \gamma t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -^{8/5}\Omega (a \sin \gamma t - m \cos \gamma t) \sin \gamma t - ^{36/5}\xi_1 (b \sin \gamma t - \\ &\quad - n \cos \gamma t) \sin \gamma t, \\ \dot{n} &= ^{8/5}\Omega (a \sin \gamma t - m \cos \gamma t) \cos \gamma t + ^{36/5}\xi_1 (b \sin \gamma t - \\ &\quad - n \cos \gamma t) \cos \gamma t. \end{aligned}$$

После усреднения по времени эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -^{18/5}\xi_1 a + ^{4/5}\Omega b, \\ \dot{m} &= -^{18/5}\xi_1 m + ^{4/5}\Omega n, \\ \dot{b} &= -^{18/5}\xi_1 b - ^{4/5}\Omega a, \\ \dot{n} &= -^{18/5}\xi_1 n - ^{4/5}\Omega m. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Замена $(a, m, b, n) = (a_0, m_0, b_0, n_0) \exp\left(-\frac{18}{5}\xi_1 t\right)$ приводит к уравнениям уже рассмотренного типа

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{4}{5}\Omega(t) b_0, & \dot{m}_0 &= \frac{4}{5}\Omega(t) n_0, \\ \dot{b}_0 &= -\frac{4}{5}\Omega(t) a_0, & \dot{n}_0 &= -\frac{4}{5}\Omega(t) m_0, \end{aligned}$$

допускающих общее решение

$$\begin{aligned} a_0 &= A \cos \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt + B \sin \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt, \\ b_0 &= B \cos \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt - A \sin \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt, \\ m_0 &= M \cos \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt + N \sin \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt, \\ n_0 &= N \cos \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt - M \sin \frac{4}{5} \int_0^t \Omega dt. \end{aligned}$$

Учитывая выполненные замены, для частного случая стоячей волны ($B = M = N = 0$) получим выражение, характеризующее ее эволюцию:

$$w = Ae^{-\frac{18}{5}\xi_1 t} \cos\left(2\varphi + \frac{4}{5} \int_0^t \Omega(t) dt\right) \cos \gamma t. \tag{14.3}$$

Это выражение показывает, что основной источник инерциальной информации — положение узлов стоячей волны относительно кольца никаких изменений не претерпел. Диссипация приводит только к уменьшению со временем амплитуды стоячей волны. Время T уменьшения амплитуды в e раз может служить для экспериментального определения коэффициента трения ξ :

$$\xi = 10R^4\rho/(3h^2T), \text{ где } h \text{ — толщина кольца.}$$

Позиционное возбуждение колебаний кольца

Для поддержания незатухающих колебаний кольца используются переменные электрические силы, для чего к самому кольцу, а также к внешним по отношению к нему электропроводящим элементам (электродам) подводится переменное напряжение. Режим позиционного возбуждения характеризуется тем, что силовое поле, создаваемое электродами, неизменно ориентировано относительно основания, а распределение силы по углу соответствует возбуждению нужной формы колебаний. Такое возбуждение может использоваться для создания начальной стоячей волны в кольце (в процессе измерений возбуждение отключается).

Электрические силы, действующие на кольцо со стороны электрода, представляют собой внешнюю распределенную нагрузку, поэтому уравнение динамики кольца с учетом диссипации и возбуждения в соответствии с (1.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \xi_1(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') + \kappa^2(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + w'') = \\ = (1/\rho S)(q_0'' - p_0'), \end{aligned} \quad (15.1)$$

где q_0 , p_0 — проекции удельной плотности (сила на единицу длины) электрических сил на направление к центру и на направление касательной соответственно.

Для вычисления этих плотностей воспользуемся выражением для плотности электрических сил, действующих на обкладки плоского конденсатора [12]:

$$\hat{f} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2, \quad (15.2)$$

Здесь V — разность потенциалов между обкладками, d — расстояние между ними, ϵ_0 — константа, входящая в множитель пропорциональности, фигурирующий в законе Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Учитывая, что расстояние между электродом и кольцом много меньше радиуса кольца, можно считать, что плотность электрических сил, действующих на кольцо, определяется выражением (15.2), при этом переменные V и d зависят от времени и от угла φ и определяют локальные значения разности потенциалов и расстояния между кольцом и электродом в точке φ :

$$V = V(t, \varphi), \quad d = d_0 + w. \quad (15.3)$$

Через d_0 обозначено расстояние между недеформированным кольцом и электродом.

Обозначая ширину электрода через L (рис. 22), получаем выражение для удельной плотности силы

$$f = \frac{\varepsilon_0 L}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2.$$

При этом сила предполагается направленной по нормали к деформированному кольцу. Учитывая также, что это всегда сила притяжения, имеем

$$\begin{aligned} q_0 &= - \frac{\varepsilon_0 L}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2, \\ p_0 &= \frac{\varepsilon_0 L}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 \theta = \\ &= \frac{\varepsilon_0 L}{2R} \left(\frac{V}{d} \right)^2 (w' + v). \end{aligned} \quad (15.4)$$

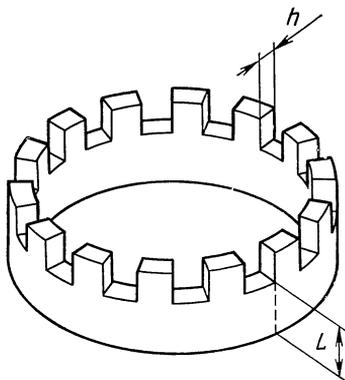


Рис. 22

Эти выражения справедливы для любого типа возбуждений, они будут использоваться в следующих параграфах.

Позиционное возбуждение предназначено для раскачивания первой формы колебаний кольца;

$$V = V_0 \cos \frac{\lambda_0}{2} t \cos \varphi. \quad (15.5)$$

В соответствии с формулой (15.1) по выражениям (15.4) необходимо найти q_0'' и p_0' ; полагая приближенно $d \simeq d_0$, находим

$$q_0'' = - \frac{\varepsilon_0 L}{d_0^2} (V'^2 + VV'') = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{d_0^2} \cos^2 \frac{\lambda_0}{2} t \cos 2\varphi.$$

Сохраняя тот же уровень точности, что и при вычислении q_0'' , в результате вычислений получаем, что $p_0' = 0$. Уравнение (15.1) при этом запишется так:

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega(t) \dot{w}' + \xi_1 (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') + \\ + \kappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^2} \cos^2 \frac{\lambda_0}{2} t \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Замену переменных $(w, \dot{w}) \rightarrow (a, m, b, n)$ выбираем по аналогии с (9.3), (9.4), учитывая, однако, что по основной форме колебания будут происходить с частотой внешней силы

$$\begin{aligned} w &= (a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi) \cos \lambda_0 t + (m \cos 2\varphi + n \sin 2\varphi) \sin \lambda_0 t + \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} [(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \cos \gamma t + \\ &+ (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \sin \gamma t], \\ \dot{w} &= \lambda_0 [-(a \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi) \sin \lambda_0 t + (m \cos 2\varphi + \end{aligned} \quad (15.7)$$

$$+ n \sin 2\varphi) \cos \lambda_0 t] + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma [-(a \cos k\varphi + b \sin k\varphi) \sin \gamma t + \\ + (m \cos k\varphi + n \sin k\varphi) \cos \gamma t].$$

Здесь a , b , m , n — функции времени и номера формы, $\gamma = = k(k^2 - 1)(k^2 + 1)^{-1/2}\kappa$. Производя замену переменных и разделяя формы, получаем осредненные уравнения, описывающие динамику основной формы, в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\Delta}{2} m + \frac{4}{5} \Omega b - \frac{18}{5} \xi_1 a, \\ \dot{m} &= \frac{\Delta}{2} a + \frac{4}{5} \Omega n - \frac{18}{5} \xi_1 m - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{20 \rho S d_0^2 \lambda_0}, \\ \dot{b} &= -\frac{\Delta}{2} n - \frac{4}{5} \Omega a - \frac{18}{5} \xi_1 b, \\ \dot{n} &= \frac{\Delta}{2} b - \frac{4}{5} \Omega m - \frac{18}{5} \xi_1 n, \quad \Delta = \lambda_0 - \frac{36\kappa^2}{5\lambda_0}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Рассмотрим вначале установившиеся колебания кольца в случае неподвижного основания ($\Omega \equiv 0$). Стационарный режим определяется из уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} m - \frac{18}{5} \xi_1 a &= 0, & \frac{\Delta}{2} a - \frac{18}{5} \xi_1 m - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{20 \rho S d_0^2 \lambda_0} &= 0, \\ -\frac{\Delta}{2} n - \frac{18}{5} \xi_1 b &= 0, & \frac{\Delta}{2} b - \frac{18}{5} \xi_1 n &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} a &= 5\varepsilon_0 L V_0^2 \Delta / 2\rho S d_0^2 \lambda_0 [(36\xi_1)^2 + 25\Delta^2], \quad b = 0, \\ m &= -18\varepsilon_0 L V_0^2 \xi_1 / \rho S d_0^2 \lambda_0 [(36\xi_1)^2 + 25\Delta^2], \quad n = 0 \end{aligned} \quad (15.9)$$

Направление возбужденных колебаний совпадает с направлением возбуждения, а отставание фазы колебаний от фазы возбуждения и амплитуда колебаний определяются формулами

$$\operatorname{tg} \psi = 36\xi_1 / 5\Delta,$$

$$A = \sqrt{a^2 + m^2} = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{2\rho S d_0^2 \lambda_0 \sqrt{(36\xi_1)^2 + 25\Delta^2}}. \quad (15.10)$$

Зависимость A (Δ), представленная формулой (15.10), является амплитудно-частотной характеристикой вынужденных колебаний кольца.

Рассмотрим случай вращения основания ($\Omega \neq 0$) при точной настройке в резонанс ($\Delta = 0$).

Выполним в (15.8) замену переменных $(a, m, b, n) \rightarrow (a_0, m_0, b_0, n_0)$ по формулам

$$a = a_0 e^{-18/5\xi_1 t}, \quad b = b_0 e^{-18/5\xi_1 t},$$

$$m = - \frac{90\xi_1}{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2} q + m_0 e^{-18/5\xi_1 t},$$

$$n = \frac{20\Omega}{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2} q + n_0 e^{-18/5\xi_1 t}, \quad q = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{20\rho S d_0^2 \lambda_0},$$
(15.11)

с точностью до величин второго порядка малости получаем систему (14.2). Подставляя общее решение этой системы в формулы замены (15.11), находим общее решение задачи в рассматриваемом случае. Квазистационарное решение, полученное из (15.11) отбрасыванием затухающих членов, приводится к виду

$$a = b = 0, \quad m = - \frac{90\xi_1}{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2} q, \quad n = \frac{20\Omega q}{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2}.$$

Это решение показывает, что при вращении основания направление колебаний кольца не совпадает с направлением возбуждения и отстает от него на угол φ_0 , определяемый из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = 2\Omega (t)/(9\xi_1). \quad (15.12)$$

При этом амплитуда колебаний также зависит от скорости вращения основания:

$$A = \sqrt{m^2 + n^2} = 5q/\sqrt{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2} (t).$$

Колебания кольца в этом случае в соответствии с формулами (15.7) происходят по закону

$$w = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{8\rho S d_0^2 \lambda_0 \sqrt{(18\xi_1)^2 + 16\Omega^2}} \cos(2\varphi + \varphi_0) \sin \lambda_0 t.$$

Тангенс угла отставания направления колебания от направления возбуждения пропорционален угловой скорости основания (15.12). Этот результат показывает, что в режиме позиционного возбуждения волновой твердотельный гироскоп может использоваться как датчик угловой скорости.

16

Параметрическое возбуждение колебаний кольца

Параметрическое возбуждение вводится для поддержания колебаний кольца с сохранением интегрирующего эффекта, не привязывая возбуждение к вращающемуся основанию.

Для этого напряжение возбуждения V не должно зависеть от угла φ :

$$V = V_0 \cos \lambda_0 t.$$

В отличие от позиционного возбуждения (15.5) здесь частота возбуждения берется вдвое большей, поскольку, как станет ясно из дальнейшего, эффект нарастания колебаний в этом случае носит параметрический характер.

Воспользовавшись формулами (15.4) и оставляя члены одинакового порядка малости, получаем

$$q_0'' - p_0' = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{d_0^3} w'' - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{2 d_0^2 R} (w'' + v'). \quad (16.1)$$

Кроме того, будем пренебрегать величиной d_0/R по сравнению с единицей, что дает основание нам сохранить в выражении (16.1) только первый член. Уравнение (15.1) при этом переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \xi_1 (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') + \\ + \kappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3} \cos^2 \lambda_0 t w''. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Выполняя в нем замену переменных по формулам (15.7) и осредняя полученные уравнения по времени, находим уравнения для основной формы:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{18\xi_1}{5} a + \left(-\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) m + \frac{4\Omega}{5} b, \\ \dot{m} &= \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) a - \frac{18\xi_1}{5} m + \frac{4\Omega}{5} n, \\ \dot{b} &= -\frac{4\Omega}{5} a - \frac{18\xi_1}{5} b - \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) n, \\ \dot{n} &= -\frac{4\Omega}{5} m + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) b - \frac{18\xi_1}{5} n. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Рассмотрим вначале параметрическое возбуждение в случае неподвижного основания ($\Omega \equiv 0$). Уравнения (16.3) при этом распадаются на две независимых и одинаковых системы относительно переменных a, m и b, n . Эти системы характеризуют развитие параметрических колебаний в случае главного резонанса. Граница устойчивости тривиального решения системы (16.3) определяется из условия

$$\begin{vmatrix} -\frac{18}{5} \xi_1 & -\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \\ \frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} & -\frac{18}{5} \xi_1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left(\frac{18\xi_1}{5} \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0} \right) = 0. \quad (16.4)$$

Уравнение (16.4) в параметрах (Δ, V_0^2) изображено на рис. 23, на котором область неустойчивости заштрихована.

Если параметры системы принадлежат области устойчивости, то любое решение экспоненциально затухает до нуля. В области неустойчивости решения экспоненциально нарастают. Таким образом, параметрическое возбуждение обладает тем свойством, что если амплитуда возбуждения недостаточна ($V_0 < V_{0 \min}$), то колебания не возбуждаются; если же амплитуда возбуждения достаточна,

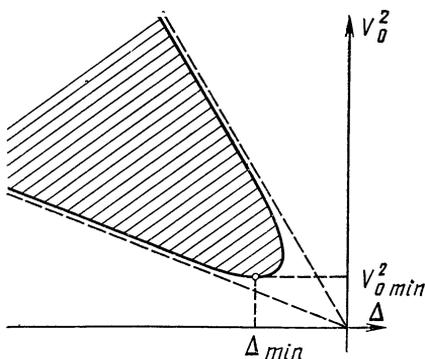


Рис. 23

то возбуждаются неустойчивые колебания. Из сказанного следует, что использование параметрического возбуждения в непрерывном режиме без каких-либо дополнительных мер по ограничению амплитуды невозможно. Ограничение колебаний может быть достигнуто введением обратной связи, которое мы рассмотрим несколько позднее.

Найдем значения $(\Delta_{\min}, V_{0 \min})$, соответствующие точке минимума границы области устойчивости на рис. 23. Введя обозначения

$$p = 18\xi_1/5, \quad l = \varepsilon_0 L / (10\rho S d_0^3 \lambda_0), \quad (16.5)$$

перепишем уравнение границы (16.4) в виде

$$p^2 + (\Delta/2 + 3lV_0^2)(\Delta/2 + lV_0^2) = 0.$$

Рассматривая это уравнение как квадратное уравнение относительно Δ , находим величину $V_{0 \min}$ из условия обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения:

$$V_{0 \min} = \sqrt{p/l}. \quad (16.6)$$

Используя связь времени затухания амплитуды колебаний в e раз с величиной p : $p = 1/T$, а также обозначение для l (16.5), вместо (16.6) найдем

$$V_{0 \min} = 6 \cdot 10^5 \sqrt{\pi \rho h d_0^3 \lambda_0 / T}. \quad (16.7)$$

Эта формула определяет минимально возможное напряжение возбуждения.

Пример. $R = 7,5 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, $E = 7 \cdot 10^{10}$ н/м²,
 $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ нс²/м⁴, $d_0 = 10^{-3}$ м, $p = 10^{-2}$ с⁻¹, $\lambda_0 \simeq 6/\sqrt{5}$,
 $\kappa = (h/R^2) \sqrt{3E/5\rho} = 7,3 \cdot 10^2$ с⁻¹, $l = \varepsilon_0 / (10\rho h d_0^3 \lambda_0) = 4,4 \cdot 10^{-6} \rightarrow$ с⁻¹·В⁻², $V_{0 \min} = \sqrt{p/l} = 48$ В.

(коэффициент затухания $p \simeq 10^{-2}$ с⁻¹ соответствует времени затухания амплитуды в два раза ~ 1 мин).

Соответствующее этому минимальному напряжению значение расстройки Δ_{\min} имеет вид

$$\Delta_{\min} = -4p = -4/T. \quad (16.8)$$

Рассмотрим теперь по-прежнему для случая неподвижного основания ($\Omega \equiv 0$) обратную связь, предназначенную для поддержания постоянной амплитуды колебаний.

Для этой цели напряжение кольцевого возбуждения V_0 в уравнениях (16.3) будем регулировать по закону

$$V_0 = v - k(r - r_0). \quad (16.9)$$

Здесь v — величина напряжения, которая при выбранной величине расстройки Δ соответствует точке на границе области устойчивости. Мгновенная амплитуда колебаний $r = \sqrt{a^2 + m^2 + b^2 + n^2}$, r_0 — требуемая амплитуда стационарных колебаний, k — коэффициент пропорциональности. Подставляя V_0 в систему уравнений (16.3) и ограничиваясь линейными членами по $(r - r_0)$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -pa + [g_1 + f_1(r - r_0)]m, \\ \dot{m} &= -[g_2 + f_2(r - r_0)]a - pm, \\ \dot{b} &= -pb + [g_1 + f_1(r - r_0)]n, \\ \dot{n} &= -[g_2 + f_2(r - r_0)]b - pn, \end{aligned} \quad (16.10)$$

где для краткости записи приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon_0 Lv^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0}, & g_2 &= -\frac{\Delta}{2} - \frac{3\varepsilon_0 Lv^2}{10\rho S d_0^3 \lambda_0}, \\ f_1 &= \frac{\varepsilon_0 Lk}{5\rho S d_0^3 \lambda_0}, & f_2 &= \frac{3\varepsilon_0 Lk}{5\rho S d_0^3 \lambda_0}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Найдем стационарные режимы в нелинейной системе (16.10), приравняв нулю ее правые части. Если $r \neq r_0$, то, очевидно, система имеет лишь тривиальное решение $a = m = b = n = 0$. В случае $r = r_0$ из условия настройки на границу области устойчивости ($p^2 + g_1 g_2 = 0$) следует наличие двухпараметрического семейства стационарных решений

$$a = (g_1/p)m, \quad b = (g_1/p)n, \quad (16.12)$$

где m и n произвольны.

Эти решения, однако, связаны условием $\sqrt{a^2 + m^2 + b^2 + n^2} = r_0$, что оставляет в системе (16.10) однопараметрическое семейство.

Это семейство мы будем строить следующим образом. Прежде всего заметим, что уравнения (16.3) и (16.10) допускают однопараметрическую группу линейных преобразований:

$$\begin{pmatrix} a \\ m \\ b \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & 0 & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & 0 & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & 0 & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ m_1 \\ b_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \quad (16.13)$$

где α — параметр группы.

Сказанное означает, что если в нелинейных уравнениях (16.10) выполнить замену (16.3), то в новых переменных a_1, m_1, b_1, n_1 уравнения останутся в точности теми же. Отсюда следует, что если мы имеем хотя бы одно частное решение системы (16.10), то, подвергнув его преобразованию (16.13), получим однопараметрическое семейство частных решений. Поэтому для построения и анализа на предмет устойчивости семейства стационарных решений достаточно рассмотреть какое-либо одно решение семейства.

Линейное преобразование (16.13) характеризует сдвиг по углу φ на постоянный угол 2χ , т. е. поворот картины волнового поля на постоянный угол.

Уравнения (16.10) допускают частное решение

$$a_0 = (g_1 r_0) / \sqrt{p^2 + g_1^2}, \quad m_0 = (p r_0) / \sqrt{p^2 + g_1^2}, \quad b_0 = n_0 = 0. \quad (16.14)$$

Это решение характеризует стоячую волну, т. е. колебания с эллиптической формой деформации кольца, направление главных полуосей которой совпадает с осями координат. Такое же решение было получено для случая позиционного возбуждения см. (15.9). Однако в том случае ориентация колебаний была связана с ориентацией возбуждения и решение (15.9) было единственным и устойчивым.

В случае же кольцевого возбуждения указанная ориентация является случайной и отражает лишь одно частное решение из семейства. Устойчивость этого решения и призвана обеспечить обратная связь (16.9), влияние которой на динамику резонатора изучается в следующем параграфе.

17

Устойчивость стационарных режимов колебаний кольца при наличии параметрического возбуждения с обратной связью

Для исследования устойчивости частного решения (16.4) составим для уравнений (16.10) уравнения в вариациях относительно этого частного решения. Сохраняя для краткости записи обозначения самих переменных для вариаций переменных (вместо *да* будем писать *a* и т. д.), имеем

$$\begin{aligned} \dot{a} &= - \left(p - \frac{f_1}{r_0} a_0 m_0 \right) a + \left(g_1 + \frac{f_1 m_0^2}{r_0} \right) m, \\ \dot{m} &= - \left(g_2 + \frac{f_2 a_0^2}{r_0} \right) a - \left(p + \frac{f_2}{r} a_0 n_0 \right) m, \\ \dot{b} &= - p b + g_1 n, \\ \dot{n} &= - g_2 b - p n. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Система уравнений (17.1) распалась на две независимые подсистемы для переменных a, m и для переменных b, n .

Начинаем с анализа первой из указанных подсистем.

Асимптотическая устойчивость этой подсистемы гарантируется при выполнении двух неравенств:

$$2p + \frac{f_2 - f_1}{r_0} a_0 m > 0,$$

$$\left(p - \frac{f_1}{r_0} a_0 m_0\right) \left(p + \frac{f_2}{r_0} a_0 m_0\right) + \left(g_1 + \frac{f_1 m_0^2}{r_0}\right) \left(g_2 + \frac{f_2 a_0^2}{r_0}\right) > 0. \quad (17.2)$$

Рассмотрим первое из неравенств. В силу естественной диссипации $p > 0$; в силу обозначений (16.11) $(f_2 - f_1) > 0$, и для выполнения первого из неравенств (17.2) достаточно иметь $a_0 > 0$ и $m_0 > 0$. Положительность m_0 очевидна из (16.4), положительность же a_0 следует из положительности g_1 . Для установления положительности g_1 следует принять во внимание уравнение границы области устойчивости $p^2 + g_1 g_2 = 0$, откуда следует $g_1 g_2 < 0$. Поскольку для границы $\Delta < 0$, то из формул (16.11) следует $g_1 > 0$.

Таким образом, первое из неравенств (17.2) выполняется при любых параметрах задачи.

Второе неравенство с учетом формул (16.14) и с учетом того, что $f_2 = 3f_1$, $g_1 g_2 = -p^2$, и предположения о том, что настройка осуществляется на точку минимума границы области устойчивости ($v = V_{0\min}$, $\Delta = \Delta_{\min}$), может быть переписано в виде

$$2g_1^2 p^2 + 3g_1^4 - p^4 > 0,$$

откуда

$$g_1^2 > 3^{-1} p^2. \quad (17.3)$$

Поскольку из формул (16.6) и (16.8) следует, что

$$g_1 = -\frac{\Delta_{\min}}{2} - \frac{\varepsilon_0 L}{10\rho S a_0^3 \lambda_0} V_{0\min}^2 = 2p - p = p,$$

то неравенство (17.3) приобретает вид $p^2 > 3^{-1} p^2$, следовательно, оно всегда выполняется.

Таким образом асимптотическая устойчивость первых двух уравнений системы (17.1) доказана.

Характеристические корни второй пары уравнений имеют вид

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2p. \dagger$$

Один из корней вещественный и отрицательный, второй — нулевой. Наличие одного нулевого корня, связанное с существованием допускаемой системой группы, приводит к тому, что вместо асимптотической устойчивости исследуемое частное решение оказывается просто устойчивым.

Итак, нами установлено, что на неподвижном основании параметрическое возбуждение в состоянии обеспечить устойчивые стационарные колебания кольца с произвольно ориентированными (не связанными с основанием) главными осями.

Остается рассмотреть вращение основания. Вернемся к исходным уравнениям (16.3), которые для краткости запишем в матричном виде:

$$\dot{x} = A(t, |x|)x, \quad (17.4)$$

где $x = (a, m, b, n)$; A — матрица системы (16.3), зависящая от времени из-за переменности $\Omega(t)$ и от модуля $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + m^2 + n^2} = r$ при наличии обратной связи (16.9). Выполним в системе (17.4) замену переменных $x \rightarrow x_1$ по формуле (16.13), которую также запишем в сокращенном виде:

$$x = Sx_1, \quad (17.5)$$

где S — матрица замены (16.13), в которой теперь будем считать α функцией времени. Подставляя формулы (17.5) в уравнение (17.4), получаем

$$\dot{x}_1 = S^{-1}A(t, |Sx_1|)Sx_1 - S^{-1}S\dot{x}_1. \quad (17.6)$$

Учитывая уже отмеченную выше инвариантность системы (16.3) по отношению к группе (16.13), имеем

$$S^{-1}A(t, |Sx_1|)S = A(t, |x_1|).$$

Зависимость α от времени приводит к появлению после преобразования дополнительных слагаемых с матрицей

$$S^{-1}S' = 2\dot{\alpha} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, уравнения (17.6) приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{18\xi_1}{5}a_1 - \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{10\rho S\sigma_0^3\lambda_0}\right)m_1 + \left(\frac{4\Omega}{5} + 2\dot{\alpha}\right)b_1, \\ \dot{m}_1 &= \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0LV_0^2}{10\rho S\sigma_0^3\lambda_0}\right)a_1 - \frac{18\xi_1}{5}m_1 + \left(\frac{4\Omega}{5} + 2\dot{\alpha}\right)n_1, \\ \dot{b}_1 &= -\left(\frac{4\Omega}{5} + 2\dot{\alpha}\right)a_1 - \frac{18\xi_1}{5}b_1 - \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{10\rho S\sigma_0^3\lambda_0}\right)n_1, \\ \dot{n}_1 &= -\left(\frac{4\Omega}{5} + 2\dot{\alpha}\right)m_1 + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\varepsilon_0LV_0^2}{10\rho S\sigma_0^3\lambda_0}\right)b_1 - \frac{18\xi_1}{5}n_1. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Из уравнения (17.7) видно, что если выбрать $\alpha(t)$ так, чтобы выполнялось тождественно

$$\frac{4}{5} \Omega(t) + 2\dot{\alpha}(t) = 0,$$

то система сводится к случаю неподвижного основания, рассмотренному ранее. Иными словами, в системе координат, вращающейся относительно кольца по закону

$$\alpha = -\frac{2}{5} \int_0^t \Omega(t) dt, \quad (17.8)$$

кольцо ведет себя как невращающееся. Весь анализ, проведенный для случая $\Omega \equiv 0$, полностью переносится на случай $\Omega(t) \neq 0$. Таким образом, параметрическое возбуждение никак не влияет на основное свойство упругого кольца. Как и в случае свободного кольца, его волновое поле поворачивается относительно тела кольца по тому же самому закону (17.8), а наличие возбуждения и обратная связь никаких искажений не вносят.

18

Комбинированное возбуждение. «Уход» гироскопа

Комбинированное возбуждение возникает в результате одновременного действия возбуждения параметрического и позиционного типа. Применение такого возбуждения по существу не представляет собой практического интереса, однако может возникнуть как паразитное явление при параметрическом возбуждении. В этом случае прецессия стоячей волны возникает и для неподвижного в пространстве кольца и представляет собой, таким образом, аналог ухода этого типа гироскопа.

Итак, будем рассматривать кольцевое возбуждение, выполненное с погрешностями. Одна из погрешностей состоит в том, что напряжение питания, зависящее от времени периодически, содержит также и некоторую постоянную составляющую $V = u + V_0 \cos \lambda_0 t$. Другая погрешность связана с непостоянством зазора между электродом и кольцом $d = d_0 + e \cos 2\varphi + w$, здесь e характеризует отличие формы электрода от круговой.

Погрешность формы рассматривается в простейшем виде, принимается во внимание лишь основная гармоника, наличие высших гармоник погрешностей формы приведет лишь к появлению колебаний по высшим формам, не влияющим в первом приближении на поведение основной формы. Также следует заметить, что зависимость зазора от угла возникает не только от погрешности формы электрода, но и от погрешности формы самого кольца. Однако с погрешностью формы кольца связаны дополнительные механические эффекты, которые будут рассмотрены в следующих параграфах.

Плотность электрических сил, приложенных к кольцу в соответствии с формулой (15.4), имеет вид

$$q_0 = -\frac{\varepsilon_0 L}{2} \left(\frac{u + V_0 \cos \lambda_0 t}{d_0 + e \cos 2\varphi + w} \right)^2 = \\ = -\frac{\varepsilon_0 L}{d_0^3} (u + V_0 \cos \lambda_0 t)^2 (d_0 - 2e \cos 2\varphi - 2w + \dots).$$

Дифференцируя ее дважды по φ , получаем выражение

$$q_0'' \simeq \frac{\varepsilon_0 L}{d_0^3} (u + V_0 \cos \lambda_0 t)^2 (w'' - 4e\ddot{\varphi} \cos 2\varphi).$$

Пренебрегая малыми третьего порядка относительно u , w и e , получаем

$$q_0'' = -\frac{8\varepsilon_0 L}{d_0^3} u V_0 e \cos 2\varphi \cos \lambda_0 t + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{d_0^3} w'' \cos^2 \lambda_0 t + \\ + \frac{2\varepsilon_0 L}{d_0^3} u V_0 w'' \cos \lambda_0 t - \frac{4\varepsilon_0 L}{d_0^3} V_0^2 e \cos 2\varphi \cos^2 \lambda_0 t.$$

Первые два члена этого выражения характеризуют соответственно позиционное и кольцевое возбуждение уже рассмотренного ранее вида. Эти члены при λ_0 , близком к частоте собственных колебаний по основной форме, обеспечивают резонансное возбуждение. Два последних члена характеризуют также позиционное и параметрическое возбуждения нерезонансного типа. Поскольку при осреднении эти члены пропадут, то мы сразу же их исключаем из рассмотрения. Итак, уравнения кольца в случае комбинированного возбуждения принимают вид

$$\ddot{w}'' - \dot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \xi_1 (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') + \kappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = \\ = k_1 \cos 2\varphi \cos \lambda_0 t + k_2 w'' \cos^2 \lambda_0 t,$$

где

$$k_1 = -\frac{8\varepsilon_0 L u V_0 e}{\rho S d_0^3}, \quad k_2 = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3}.$$

После замены переменных по формулам (15.7) и усреднения имеем

$$\dot{a} = \frac{4}{5} \Omega b - \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{k_2}{10\lambda_0} \right) m - \frac{18}{15} \xi_1 a, \\ \dot{m} = \frac{4}{5} \Omega n + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3k_2}{10\lambda_0} \right) a - \frac{18}{5} \xi_1 m - \frac{k_2}{10\lambda_0}, \\ \dot{b} = -\frac{4}{5} \Omega a - \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{k_2}{10\lambda_0} \right) n - \frac{18}{5} \xi_1 b, \\ \dot{n} = -\frac{4}{5} \Omega m + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3k_2}{10\lambda_0} \right) b - \frac{18}{5} \xi_1 n.$$

Учитывая обозначения (16.11) и вводя новые обозначения

$$\kappa_1 = \frac{8\varepsilon_0 L u e}{10\lambda_0 \rho S d_0^3} v, \quad \kappa_2 = \frac{8\varepsilon_0 L u e k}{10\lambda_0 \rho S d_0^3},$$

где k — коэффициент обратной связи (16.9), для случая неподвижного основания получаем

$$\dot{a} = -pa + [g_1 + f_1 (r - r_0)] m, \quad (18.1)$$

$$\dot{m} = -[g_2 + f_2 (r - r_0)] a - pm + \kappa_1 - \kappa_2 (r - r_0),$$

$$\dot{b} = -pb + [g_1 + f_1 (r - r_0)] n,$$

$$\dot{n} = -[g_2 + f_2 (r - r_0)] b - pn,$$

откуда находим стационарные режимы

$$-pa + [g_1 + f_1 (r - r_0)] m = 0,$$

$$-[g_2 + f_2 (r - r_0)] a - pm + \kappa_1 - \kappa_2 (r - r_0) = 0,$$

$$-pb + [g_1 + f_1 (r - r_0)] n = 0,$$

$$-[g_2 + f_2 (r - r_0)] b - pn = 0,$$

$$r = \sqrt{a^2 + m^2 + b^2 + n^2}.$$

Поскольку эта система неоднородная ($\kappa_1 \neq 0$), то она имеет нетривиальное решение, если ее определитель отличен от нуля. Для последних двух уравнений это дает $b = n = 0$. Из первых двух уравнений находим

$$a = -\frac{[g_1 + f_1 (r - r_0)] [\kappa_2 (r_1 - r_0) - \kappa_1]}{p^2 + [g_2 + f_2 (r - r_0)] [g_1 + f_1 (r - r_0)]} \quad (18.2)$$

$$m = -\frac{p [\kappa_2 (r - r_0) - \kappa_1]}{p^2 + [g_2 + f_2 (r - r_0)] [g_1 + f_1 (r - r_0)]}.$$

Учитывая, что $r^2 = a^2 + m^2$, получаем соотношение для нахождения r :

$$[\kappa_2 (r - r_0) - \kappa_1]^2 \{ [g_1 + f_1 (r - r_0)]^2 + p^2 \} = r^2 [(g_1 f_2 + g_2 f_1) (r - r_0) + f_1 f_2 (r - r_0)^2]^2.$$

При получении этого уравнения было учтено соотношение

$$p^2 + g_1 g_2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно r , имеем

$$r = r_0 \pm \frac{\kappa_1 \sqrt{g_1^2 + p^2}}{r_0 (g_1 f_2 + g_2 f_1)} + \dots$$

Точками обозначены члены порядка κ_1^2 , κ_2^2 .

Найденное для r решение показывает, что в системе возможны два стационарных режима: один с амплитудой, величина которой больше r_0 , другой с амплитудой, величина которой меньше r_0 . Первый режим соответствует колебаниям, когда позиционное и кольцевое возбуждения работают в фазе, усиливая друг друга. Второй режим соответствует случаю, когда оба возбуждения противофазны и, ослабляют друг друга.

Учитывая формулы (16.5), (16.6), (16.8), (16.11), можно переписать выражение для r в виде

$$r = r_0 \pm \alpha_1 / (2\sqrt{2}r_0kl). \quad (18.3)$$

Анализ устойчивости этих режимов показывает, что устойчивому режиму соответствует знак плюс в формуле (18.3), а неустойчивому — минус. Формулы с учетом соотношения (18.3) показывают, что в первом приближении

$$a = r_0/\sqrt{2}, \quad m = r_0/\sqrt{2}.$$

Обращаясь теперь к формулам (15.7), имеем решение

$$w = (r_0/\sqrt{2}) (\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t) \cos 2\varphi.$$

С течением времени волна устанавливается по направлению позиционного возбуждения, каким бы малым оно ни добавлялось к параметрическому.

Оценим величину скорости прецессии стоячей волны в этом положении. Пусть начальные условия таковы, что

$$w|_{t=0} = (r_0/\sqrt{2}) (\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t) \sin 2\varphi.$$

Это соответствует в системе (18.1) начальным условиям

$$a(0) = m(0) = 0, \quad b(0) = n(0) = r_0/\sqrt{2}.$$

Решим соответствующую начальную задачу Коши для этой нелинейной системы.

Для решения будем использовать тот факт, что в силу имеющейся обратной связи разность $r - r_0$ мало меняется с течением времени. Поэтому эту разность в первом приближении можно считать постоянной, а уравнения (18.1) рассматривать как линейные. Подставляя в $r - r_0$ решение первого приближения, получаем для второго приближения снова линейные неоднородные уравнения с известными правыми частями. Этот процесс, который может быть как угодно далеко продолжен, сходится, и его пределом является точное решение.

Перейдем к построению первого приближения. В дальнейшем будут удобны формулы, которые получим, используя (16.5), (16.6), (16.8) и (16.11):

$$g_1 = p, \quad g_2 = -p, \quad g_1 f_2 + g_2 f_1 = 4pkl.$$

При постоянном $r - r_0$ система (18.1) распадается на две независимые подсистемы с одним и тем же характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} -\lambda - p & g_1 + \frac{\alpha_1 f_1}{2\sqrt{2}r_0kl} \\ -g_1 - \frac{\alpha_1 f_2}{2\sqrt{2}r_0kl} & -\lambda - p \end{vmatrix} \simeq \lambda^2 + 2\lambda p + \frac{\alpha_1 p \sqrt{2}}{r_0} = 0$$

с корнями

$$\lambda_1 \simeq -2p, \quad \lambda_2 \simeq -\kappa_1/(r_0\sqrt{2}).$$

Соответственно общее решение системы (18.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} a &= C_1 e^{-2pt} + C_2 e^{-(\kappa_1/r_0\sqrt{2})t} + r_0/\sqrt{2}, \\ m &= -C_1 e^{-2pt} + C_2 e^{-(\kappa_1/r_0\sqrt{2})t} + r_0/\sqrt{2}, \\ b &= C_3 e^{-2pt} + C_4 e^{-(\kappa_1/r_0\sqrt{2})t}, \\ n &= -C_3 e^{-2pt} + C_4 e^{-(\kappa_1/r_0\sqrt{2})t}. \end{aligned}$$

Учитывая заданные начальные условия, получаем

$$a = m = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \left(1 - e^{-\frac{\kappa_1}{r_0\sqrt{2}}t}\right), \quad b = n = \frac{r_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\kappa_1}{r_0\sqrt{2}}t}.$$

Соответственно решение

$$\begin{aligned} w &= \frac{r_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - e^{-\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}}\right) \cos 2\varphi + e^{-\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}} \sin 2\varphi \right] \cos \lambda_0 t + \\ &\quad + \frac{r_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - e^{-\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}}\right) \cos 2\varphi + e^{-\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}} \sin 2\varphi \right] \sin \lambda_0 t = \\ &= \tilde{r}_0(t) \sin 2(\varphi + \tilde{\varphi}) (\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t), \end{aligned} \quad (18.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{r}_0(t) &= \frac{r_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}}\right)^2 + e^{-\frac{2\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}}}, \\ \tilde{\varphi}(t) &= \frac{1}{2} \arctg \left(e^{\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Полученная формула показывает, что прецессия волны к стационарному положению происходит со скоростью

$$\dot{\varphi} = -\dot{\tilde{\varphi}} = -\frac{\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} r_0 \left[1 + \left(e^{\frac{\kappa_1 t}{r_0\sqrt{2}}} - 1\right)^2\right]}.$$

Найдем максимальное значение модуля этой скорости. Для этого требуется найти максимум функции

$$f(\tau) = \frac{e^\tau}{1 + (e^\tau - 1)^2}.$$

Он достигается при $e^\tau = \sqrt{2}$ и выражается формулой

$$\max f(\tau) = \sqrt{2}/[1 + (\sqrt{2} - 1)^2].$$

Следовательно, максимальное значение ухода имеет вид

$$\max |\dot{\varphi}| = \kappa_1/2r_0 [1 + (\sqrt{2} - 1)^2] < \kappa_1/(2r_0),$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что

$$\max |\phi| \simeq 2\varepsilon_0 euv / (5\lambda_0 \rho h d_0^3 r_0), \quad (18.5)$$

где ε_0 — абсолютная электрическая постоянная вакуума ($1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ нм²·Кл⁻²); e — амплитуда овальности кольцевого электрода; v — напряжение переменного электрического поля, возбуждающего кольцо; u — паразитная постоянная составляющая этого же поля; λ_0 — частота возбуждения, близкая к собственной частоте кольца для основной формы колебаний; ρ — плотность материала кольца; h — толщина кольца; d_0 — зазор между кольцом и электродом; r_0 — амплитуда колебаний кольца по основной форме.

Установленный тип ухода, как следует из формулы (18.5), тем больше, чем выше напряжение питания v , поэтому это напряжение следует выбирать как можно ближе к пороговому значению, определяемому формулой (16.6). Подставляя пороговое значение в формулу (18.5), получаем

$$\max |\phi| \simeq \frac{2eu}{5\rho R^2 r_0} \sqrt{\frac{3\varepsilon_0 \xi h}{\lambda_0 d_0^3}}, \quad (18.6)$$

где R — радиус кольца, ξ — коэффициент внутреннего трения кольца.

Учитывая, что частота колебаний λ_0 близка к собственной $\lambda_0 \simeq 6\pi/\sqrt{5}$, находим окончательно, что

$$\max |\phi| \simeq 0,8 \frac{eu}{R r_0 \rho^{3/4} E^{1/4}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \xi}{d_0^3}}. \quad (18.7)$$

Формула (18.7) выражает скорость ухода через независимые параметры. Из нее следует, что скорость ухода растет с увеличением погрешностей возбуждения e , u и коэффициента внутреннего трения ξ . Для уменьшения ухода следует увеличивать радиус кольца R , амплитуду колебаний r_0 , величину зазора d_0 и характеризующие материал величины ρ и E .

Пример. Выбираем те же параметры, что и в предыдущем примере: $d_0 = 10^{-3}$ м, $h = 10^{-3}$ м, $\rho = 2,5 \cdot 10^{-3}$ н·с²·м⁻⁴, $\lambda_0 = 7,3 \cdot 10^2$ с⁻¹. Кроме того, выберем $e = 10^{-5}$ м, $v = 50$ В $> V_{0 \min}$,

$$u = 0,01 \text{ В}, \quad r_0 = 10^{-4} \text{ м}$$

По формуле (18.5) получим $\max |\phi| \simeq 0,02$ 0/ч. Направление ухода зависит от сдвига фаз между колебаниями кольца в начальный момент времени и возбуждением. Так, например, если в начальный момент времени выбрать

$$w|_{t=0} = -(r_0/\sqrt{2})/(\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t) \sin 2\phi,$$

то уход будет происходить в противоположную сторону.

Собственные частоты кольцевого резонатора с зависящими от угла параметрами

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались такие отклонения от идеальной схемы, которые не связаны с дефектами геометрии самого кольца или с дефектами его материала. Рассмотрение этого вида неидеальности удобнее всего начать с анализа влияния на динамику кольца, оказываемого неравномерностью плотности материала, т. е. со случая, когда ρ зависит от угла φ . Этот случай наиболее просто поддается анализу, поскольку функция Лагранжа (10.1) остается при этом без изменения. При построении уравнений Лагранжа дифференцировать по φ плотность ρ не приходится, уравнения движения кольца получаются теми же см. (10.3), но только в них δ^2 и κ^2 оказываются зависящими от угла φ .

Заметим, что случай переменной плотности представляет собой и большой практический интерес, поскольку распределением плотности достаточно легко управлять, чтобы добиться в приборе требуемых свойств. Пример кольца с переменной плотностью ρ приведен на рис. 22. Ясно, что если зубцов на кольце достаточно много, то они практически не влияют на его жесткость, которая будет определяться как для кольца постоянного сечения шириной L . Однако поскольку массу зубцов нельзя не учитывать, плотность материала кольца становится переменной.

Выбираем для плотности кольца следующий закон:

$$1/\rho = (\chi/\rho_0) \cos 2\varphi + 1/\rho_0. \quad (19.1)$$

Здесь мы выбрали для анализа лишь вторую гармонику разложения обратной величины плотности в ряд Фурье по углу φ , поскольку наиболее принципиальное влияние на динамику основной формы оказывает именно она.

Уравнения движения кольца (10.3) приобретают вид

$$\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} - \delta^2 (v'' - w') - \kappa^2 (w''' + v'') = \chi [\delta^2 (v' - w') + \kappa^2 (w''' + v'')] \cos 2\varphi, \quad (19.2)$$

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} - \delta^2 (v' - w) + \kappa^2 (w^{IV} + v''') = \chi [\delta^2 (v' - w) - \kappa^2 (w^{IV} + v''')] \cos 2\varphi.$$

Для уравнений (19.2) поставим задачу выяснить, какое влияние дефект χ оказывает на частоту собственных колебаний по основной форме, считая основание неподвижным. Заметим, что из формул (10.5) и (10.6) следует, что $G_2 \equiv -1/G_1$. Обозначая $G_2 = G$, решение (19.2) будем искать в соответствии с (10.4) в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} [(Gx + \alpha) \cos k\varphi + (Gy + \beta) \sin k\varphi], \quad (19.3)$$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} [(-y + G\beta) \cos k\varphi + (x - G\alpha) \sin k\varphi].$$

где x, y, α, β — неизвестные функции номера k и времени.

Введем обозначения:

$$F(x, y, \alpha, \beta, \varphi) \equiv \chi [\delta^2 (v'' - w') + \kappa^2 (w''' + v'')] \cos 2\varphi, \quad (19.4)$$

$$\Phi(x, y, \alpha, \beta, \varphi) \equiv \chi [\delta^2 (v' - w) - \kappa^2 (w^{IV} + v''')] \cos 2\varphi,$$

где в правые части следует подставить формулы (19.3).

Поскольку сейчас нас интересуют лишь колебания кольца по основной форме, а четные гармоники в (19.3) в силу (19.2) оказываются никак не связанными с нечетными, то далее мы будем рассматривать лишь четные гармоники.

Фигурирующие в (19.4) комбинации после подстановки в них (19.3) представляются рядами

$$(v'' - w') \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k-2)\gamma_{k-2}y_{k-2} + (k+2)\gamma_{k+2}y_{k+2}] \times \\ \times \sin k\varphi + [(k-2)\gamma_{k-2}x_{k-2} + (k+2)\gamma_{k+2}x_{k+2}] \cos k\varphi\}, \quad (19.5)$$

$$(w''' + v'') \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k-2)^2(v_{k-2}x_{k-2} - \rho_{k-2}\alpha_{k-2}) + \\ + (k+2)^2(v_{k+2}x_{k+2} - \rho_{k+2}\alpha_{k+2})] \cos k\varphi + [(k-2)^2(v_{k-2}y_{k-2} - \\ - \rho_{k-2}\beta_{k-2}) + (k+2)^2(v_{k+2}y_{k+2} - \rho_{k+2}\beta_{k+2})] \sin k\varphi\},$$

$$(v' - w) \cos 2\varphi = y_0 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\gamma_{k-2}y_{k-2} + \gamma_{k+2}y_{k+2}] \cos k\varphi - \\ - (\gamma_{k-2}x_{k-2} + \gamma_{k+2}x_{k+2}) \sin k\varphi\},$$

$$(w^{IV} + v''') \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k-2)^3(v_{k-2}x_{k-2} - \rho_{k-2}\alpha_{k-2}) + \\ + (k+2)^3(v_{k+2}x_{k+2} - \rho_{k+2}\alpha_{k+2})] \sin k\varphi - [(k-2)^3(v_{k-2}y_{k-2} - \\ - \rho_{k-2}\beta_{k-2}) + (k+2)^3(v_{k+2}y_{k+2} - \rho_{k+2}\beta_{k+2})] \cos k\varphi\},$$

$$v_k = \begin{cases} 2k, & k > 0, \\ 0, & k \leq 0, \end{cases} \quad \gamma_k = \begin{cases} k^2 + 1, & k > 0, \\ 0, & k \leq 0, \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} k^2 - 1, & k > 0, \\ 0, & k \leq 0, \end{cases}$$

$$x_k = x(k), \dots$$

После подстановки выражений (19.3) в уравнения (19.2) и разделения по формам получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных $x(t, k), y(t, k), \alpha(t, k), \beta(t, k)$, которая в силу вида раз-

ложений (19.5) будет иметь характеристический определитель типа

D'_0	0	0	0	0	...
0	D'_0	0	0	0	...
0	0	D''_0	0	χ	0
0	0	0	D''_0	0	0
χ	D'_2	0	0	0	0
	0	D'_2	0	0	0
	0	0	D''_2	χ	0
	0	0	0	D''_2	0
0	χ	D'_4	0	0	0
		0	D'_4	0	0
		0	0	D''_4	χ
		0	0	0	D''_4
0	0	χ	D'_6	0	0
			0	D'_6	0
			0	0	D''_6
			0	0	D''_6
...

(19.6)

Здесь $D'_k = \lambda^2 + \mu_1^2(k)$; $D''_k = \lambda^2 + \mu_2^2(k)$; $\mu_1^2, \mu_2^2 - (10.7)$; буквой χ обозначены блоки, все элементы которых имеют порядок χ .

Бесконечный определитель (19.6) после его нормирования на коэффициенты D'_k и D''_k сходится [8]. Приравнивая его к нулю, получим характеристическое уравнение, решение которого и даст собственные частоты кольца.

Поставим задачу найти только два корня этого уравнения, которые при $\chi \rightarrow 0$ стремятся к двойному корню

$$(D''_2)^2 = [\lambda^2 + \mu_2^2(2)]^2 = 0.$$

Этот двойной корень как раз и характеризует собственную частоту колебаний по основной форме. Более того, ограничимся вычислением этих корней с точностью до χ^4 . Поскольку определитель (19.6) имеет вид блочного якобиевого определения, то, как следует из [4], для вычисления указанных корней с заданной точностью достаточно ограничиться вычислением отмеченного в (19.6) главного диагонального минора. Иными словами, для вычисления собственной частоты колебаний кольца с рассматриваемым дефектом

с точностью до χ^4 достаточно рассмотреть лишь нулевую, вторую и четвертую формы колебаний.

Учитывая это, получаем следующие выражения для коэффициентов при синусах и косинусах функций (19.4):

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \chi(-5\delta^2 x_2 + 6\kappa^2 \alpha_2), & \Phi_0 &= \chi({}^5/2\delta^2 y_2 - 12\kappa^2 \beta_2), \\
 F_2^c &= \chi(-34\delta^2 x_4 + 120\kappa^2 \alpha_4), & \Phi_2^c &= \chi[(y_0 + {}^{17}/2 y_4)\delta^2 - 480\kappa^2 \beta_4], \\
 F_2^s &= \chi(-34\delta^2 y_4 + 120\kappa^2 \beta_4), & \Phi_2^s &= \chi[-{}^{17}/2\delta^2 x_4 + 480\kappa^2 \alpha_4], \\
 F_4^c &= \chi(-5\delta^2 x_2 + 6\kappa^2 \alpha_2), & \Phi_4^c &= \chi({}^5/2\delta^2 y_2 - 12\kappa^2 \beta_2), \\
 F_4^s &= \chi(-5\delta^2 y_2 + 6\kappa^2 \beta_2), & \Phi_4^s &= \chi(-{}^5/2\delta^2 x_2 + 12\kappa^2 \alpha_2).
 \end{aligned}
 \tag{19.7}$$

Подстановка формул (19.3) в уравнения (19.2) с разделением по формам колебаний приводит к следующей бесконечной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_k + \mu_1^2(k) x_k &= \frac{1}{G^2 + 1} (GF_k^c + \Phi_k^s), \\
 \ddot{y}_k + \mu_1^2(k) y_k &= \frac{1}{G^2 + 1} (GF_k^s - \Phi_k^c), & k &= 0, 1, 2, \dots \\
 \ddot{\alpha}_k + \mu_2^2(k) \alpha_k &= \frac{1}{G^2 + 1} (F_k^c - G\Phi_k^s), \\
 \ddot{\beta}_k + \mu_2^2(k) \beta_k &= \frac{1}{G^2 + 1} (F_k^s + G\Phi_k^c).
 \end{aligned}
 \tag{19.8}$$

Учитывая все приведенные выше соображения, а также соотношения (19.7), получаем для вычисления частот основной формы с точностью до χ^4 из системы (19.8) укороченную систему

$$\begin{cases}
 \text{I} \left\{ \begin{aligned}
 \ddot{\alpha}_0 &= \chi(-5\delta^2 x_2 + 6\kappa^2 \alpha_2), \\
 \ddot{x}_2 + 5\delta^2 x_2 &= \frac{\chi}{5} \left(-\frac{153}{2} \delta^2 x_4 + 720\kappa^2 \alpha_4 \right), \\
 \ddot{\alpha}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \alpha_2 &= \frac{\chi}{5} (-17\delta^2 x_4 - 840\kappa^2 \alpha_4), \\
 \ddot{x}_4 + 17\delta^2 x_4 &= \frac{\chi}{17} \left(-\frac{45}{2} \delta^2 x_2 + 36\kappa^2 \alpha_2 \right), \\
 \ddot{\alpha}_4 + \mu_2^2(4) \alpha_4 &= \frac{\chi}{17} (5\delta^2 x_2 - 42\kappa^2 \alpha_2),
 \end{aligned} \right. \\
 \\
 \text{II} \left\{ \begin{aligned}
 \ddot{y}_0 + \delta^2 y_0 &= -\chi \left(\frac{5}{2} \delta^2 y_2 - 12\kappa^2 \beta_2 \right), \\
 \ddot{y}_2 + 5\delta^2 y_2 &= \frac{\chi}{5} \left(-\delta^2 y_0 - \frac{153}{2} \delta^2 y_4 + 720\kappa^2 \beta_4 \right), \\
 \ddot{\beta}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \beta_2 &= \frac{\chi}{5} (2\delta^2 y_0 - 17\delta^2 y_4 - 840\kappa^2 \beta_4), \\
 \ddot{y}_4 + 17\delta^2 y_4 &= \frac{\chi}{17} \left(-\frac{45}{2} \delta^2 y_2 + 36\kappa^2 \beta_2 \right), \\
 \ddot{\beta}_4 + \mu_2^2(4) \beta_4 &= \frac{\chi}{17} (5\delta^2 y_2 - 42\kappa^2 \beta_2).
 \end{aligned} \right.
 \end{cases}$$

Уравнения распались на две не связанные друг с другом системы I и II.

В подсистеме I первое уравнение отделяется, а характеристический определитель оставшихся уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\delta^2 & 0 & \frac{153}{10} \chi \delta^2 & -144\chi\kappa^2 \\ 0 & \lambda^2 + \frac{36}{5} \kappa^2 & \frac{17}{5} \chi \delta^2 & 168\chi\kappa^2 \\ \frac{45}{34} \chi \delta^2 & -\frac{36}{17} \chi\kappa^2 & \lambda^2 + 17\delta^2 & 0 \\ -\frac{5}{17} \chi \delta^2 & \frac{42}{17} \chi\kappa^2 & 0 & \lambda^2 + \mu_2^2(4) \end{vmatrix} = 0. \quad (19.9)$$

Определим корень этой системы, соответствующий частоте основной формы в виде

$$\lambda_1^2 = -\frac{36}{5} \kappa^2 + A_1 \chi^2 \kappa^2 + \dots \quad (19.10)$$

Подставляя это представление в определитель (19.9) и пренебрегая величинами типа κ^2 , если они стоят в сумме с δ^2 , а также вынося общие множители из строк и столбцов, имеем

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \frac{17}{5} & 168 \\ 0 & -\frac{36}{17} & 17 & 0 \\ 0 & \frac{42}{17} & 0 & \frac{16 \cdot 225}{17} - \frac{36}{5} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим

$$A_1 = -\frac{36}{5 \cdot 17} + \frac{42 \cdot 168}{\left(\frac{16 \cdot 225}{17} - \frac{36}{5}\right) 17}. \quad (19.11)$$

Характеристический определитель системы II — пятого порядка. Подставляя в него представление

$$\lambda_{II}^2 = -(36/5) \kappa^2 + A_{II} \chi^2 \kappa^2 + \dots \quad (19.12)$$

и проделывая аналогичные выкладки, получаем

$$A_{II} = -\frac{36}{17 \cdot 5} + \frac{42 \cdot 168}{\left(\frac{16 \cdot 225}{17} - \frac{36}{5}\right) 17} + \frac{24}{5}. \quad (19.13)$$

Таким образом, разность квадратов частот

$$\lambda_{II}^2 - \lambda_I^2 = 24/5 \chi^2 \kappa^2,$$

откуда

$$\lambda_{II} - \lambda_I = -(2i/\sqrt{5}) \chi^2 \kappa. \quad (19.14)$$

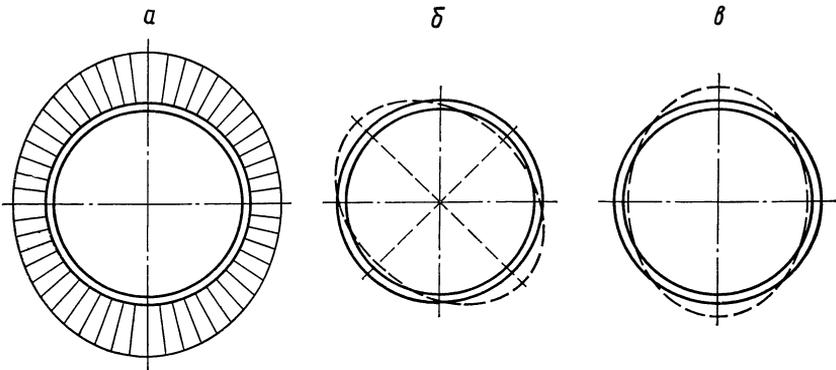


Рис. 24

Найденные результаты показывают, что стоячая волна, соответствующая основной форме колебаний, имеет различные частоты в зависимости от ориентации ее пучностей. Из замены переменных (19.3) вытекают два случая ориентации стоячей волны с единственной частотой колебаний

$$w = r \cos (|\lambda_I| t + t_0) \sin k\varphi, \quad w = r \cos (|\lambda_{II}| t + t_0) \cos k\varphi.$$

Первый случай соответствует положению стоячей волны, когда ее оси расположены под углом 45° к осям диаграммы распределения плотности ρ . Второй случай имеет место, если главные оси формы совпадают с главными осями диаграммы плотности. На рис. 24, б, в изображены эти два типа стоячих волн. Диаграмма распределения плотности показана штриховкой на рис. 24, а.

И в первом и во втором случае происходит уменьшение частоты колебаний на основной форме по сравнению с идеальным кольцом. Однако во втором случае снижение частоты больше, чем в первом. При произвольной ориентации стоячей волны свободные колебания происходят одновременно на двух найденных частотах, что приводит к явлениям типа биений с разностью частот $(2/\sqrt{5})\chi^2\kappa$. Рассмотрим этот случай подробнее. Пусть одночастотное решение системы I по α_2 имеет вид

$$\alpha_2 = A \cos |\lambda_I| t + B \sin |\lambda_I| t.$$

Аналогичное одночастотное решение системы II по β_2

$$\beta_2 = C \cos |\lambda_{II}| t + D \sin |\lambda_{II}| t.$$

Обозначив для краткости $|\lambda_I| = \omega$, $|\lambda_{II}| = \Delta + \omega$ и подставляя в замену (19.3), найдем

$$w = 2 [(C \cos (\omega + \Delta) t + D \sin (\omega + \Delta) t) \cos 2\varphi - (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \sin 2\varphi].$$

Таково общее решение исходной задачи по основной форме колебаний. Рассмотрим эволюцию стоячей волны, в момент $t = 0$ ориентированной по биссектрисе между направлениями стоячих волн с частотами λ_I , и λ_{II} :

$$w = A [\sin(\omega + \Delta)t \cos 2\varphi + \sin \omega t \sin 2\varphi].$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$w = 2A \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta t}{2}\right) \cos\left(2\varphi + \frac{\Delta t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin \omega t + \\ + A \sin \Delta t \cos(\omega t - 2\varphi).$$

Первое слагаемое характеризует стоячую волну с медленно меняющейся амплитудой $2A \sin(\pi/4 - \Delta t/2)$, второе — бегущую волну, также с медленно меняющейся амплитудой $A \sin \Delta t$. Медленно меняющимся оказывается и положение пучности стоячей волны $2\varphi + \Delta t/2 - \pi/4$. Это обстоятельство требует учета в алгоритме обработки информации, в противном случае изменение положения пучности будет восприниматься как «уход» $\varphi = -\Delta/4$. Последнее замечание имеет отношение к случаю свободное (без возбуждения) кольца.

Замечание 1. К установлению полученного выше результата можно было бы подойти исходя из модели нерастяжимого кольца. Функция Лагранжа в случае невращающегося кольца имеет вид

$$L = \frac{R\rho S}{2}(\dot{v}^2 + \dot{w}^2) - \frac{EI}{2R^3}(w'' + v'')^2.$$

Уравнение связи

$$f(v', w) \equiv v' - w = 0.$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} + \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} - \lambda \frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

приводят к уравнениям динамики нерастяжимого кольца переменной плотности

$$\rho \ddot{v} - EI (SR^4)^{-1} (w'''' + v'') + \lambda' = 0, \\ \rho \dot{w} + EI (SR^4)^{-1} (w^{IV} + v''') + \lambda = 0, \quad v' = w.$$

Или, исключая из них переменную λ , находим

$$\left[\frac{(\rho \dot{w})'}{\rho} \right]' - \dot{w} + \frac{EI}{\rho R^4 S} (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') - \\ - \frac{EI \rho'}{\rho^2 R^4 S} (w^V + 2w''' + w') = 0.$$

Предполагая, что плотность зависит от угла φ в соответствии с формулой (19.1), с точностью до величин второго порядка малости

относительно χ получим

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \dot{w} + \kappa^2 (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') &= \\ &= -4\chi (\cos 2\varphi - \chi \cos 4\varphi) \ddot{w} - \chi (2 \sin 2\varphi - \chi \sin 4\varphi) \dot{w}' - \\ &- \chi \kappa^2 (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') \cos 2\varphi + 2\chi \kappa^2 (w^V + 2w''' + w') \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Для проверки того факта, что написанное уравнение может быть получено прямым предельным переходом при $\delta^2 \rightarrow \infty$ из уравнений (19.2), следует найти $\delta^2 (w' - w)$ из второго уравнения системы (19.2), удерживая члены с χ^2 , и подставить полученное выражение в первое уравнение этой системы, после чего отождествление $v' = w$ и приводит к выписанному выше уравнению. Это уравнение описывает систему с меньшим числом степеней свободы по каждой форме, чем система (19.2), однако правые части существенно сложнее и содержат члены разных порядков по χ . Поэтому для корректного анализа уравнения уже недостаточно ограничиваться нулевой, второй и четвертой формами колебаний, как в случае растяжимого кольца. Требуется также учитывать высшие формы. Поэтому использование условия нерастяжимости в данной задаче к упрощениям не приводит.

Замечание 2. Полученная выше формула для разности частот $(2/\sqrt{5}) \chi^2 \kappa$ связана с типом зависимости плотности от угла φ , которая для упрощения выкладок была выбрана в виде (19.1). Если бы эта зависимость была выбрана в виде $\rho = \rho_0 (1 + \chi \cos 2\varphi)$, результат получился бы уже несколько иной. Различие объясняется тем, что на искомую разность частот в принятом приближении влияет не только вторая гармоника разложения плотности в ряд Фурье по углу φ , но и четвертая также. Поскольку разность частот зависит от случайного сочетания этих гармоник в реальном кольце, то основную ценность представляет не сам коэффициент $2/\sqrt{5}$, а лишь его порядок.

Замечание 3. Рассмотрение прочих дефектов кольца, таких, как овальность, разнотолщинность, неоднородность упругих свойств материала, приводит к уравнениям, вполне аналогичным (19.2), лишь с несколько измененной структурой правой части. Все принципы приведенного анализа сохраняются. Зависимость разности частот от амплитуды второй гармоники того или иного дефекта имеет такой же порядок, как и в случае переменной плотности — $\chi^2 \kappa$. Здесь χ — относительная амплитуда второй гармоники рассматриваемого дефекта. В случае овальности кольца $\chi = \Delta R/R$, в случае разнотолщинности $\chi = \Delta h/h$ и т. п.

Особенности параметрического возбуждения стоячих волн в кольце с двумя частотами на основной форме

Рассмотренную в предыдущем параграфе модель, в которой стоячая волна, соответствующая основной форме колебаний резонатора, представляет собой сумму двух стоячих волн с отличающимися частотами, будем изучать с учетом внутренней диссипации и параметрического возбуждения.

Уравнения движения такого кольца имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{v} - \delta^2 (v'' - w') - \kappa^2 (w'''' + v'') - \xi_1 (\dot{w}'''' + \dot{v}'') - \xi_2 (\dot{v}'' - \dot{w}') &= \frac{p_0}{\rho S} + \\ &+ \frac{\hat{q}_0}{\rho S R} (w' + v) + \chi [\delta^2 (v'' - w') + \kappa^2 (w'''' + v'')] \cos 2\varphi, \\ \ddot{w} - \delta^2 (v' - w) + \kappa^2 (w^{IV} + v''') + \xi_1 (\dot{w}^{IV} + \dot{v}''') - \xi_2 (\dot{v}' - \dot{w}) &= \frac{q_0}{\rho S} - \\ - \frac{\hat{q}_0}{\rho S R} (w'' + v') + \chi [\delta^2 (v' - w) - \kappa^2 (w^{IV} + v''')] \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (20.1)$$

В соответствии с (15.4) нагрузка, приложенная к кольцу, в случае параметрического возбуждения записывается в форме

$$p = p_0 = \frac{\varepsilon_0 L}{2R} \left(\frac{V_0 \cos \lambda_0 t}{d_0 + w_0 + w} \right) (w' + v) \simeq \frac{\varepsilon_0 L}{2R} \left(\frac{V_0 \cos \lambda_0 t}{d_0 + w_0} \right)^2 (w' + v), \quad (20.2)$$

$$q = - \frac{\varepsilon_0 L}{2} \left(\frac{V_0 \cos \lambda_0 t}{d_0 + w_0 + w} \right)^2.$$

Выделяя в q среднее значение, получаем

$$\begin{aligned} \hat{q}_0 &= - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{4 (d_0 + w_0)^2}; \quad q_0 = - \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{4 (d_0 + w_0)^2} \cos 2\lambda_0 t + \\ &+ \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{(d_0 + w_0)^3} w \cos^2 \lambda_0 t. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (20.1), находим

$$\begin{aligned} \ddot{v} - \delta^2 (v'' - w') - \kappa^2 (w'''' + v'') - \xi_1 (\dot{w}'''' + \dot{v}'') - \xi_2 (\dot{v}'' - \dot{w}') &= \\ = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{4 R \rho S d_0^2} (w' + v) \cos 2\lambda_0 t + \chi [\delta^2 (v'' - w') + \kappa^2 (w'''' + v'')] \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (20.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} - \delta^2 (v' - w) + \kappa^2 (w^{IV} + v''') + \xi_1 (\dot{w}^{IV} + \dot{v}''') - \xi_2 (\dot{v}' - \dot{w}) &= \\ = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3} w \cos^2 \lambda_0 t + \chi [\delta^2 (v' - w) - \kappa^2 (w^{IV} + v''')] \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

В первом из уравнений (20.4) произошло сокращение постоянной составляющей нагрузки, во втором опущены два члена:

$\varepsilon_0 LV_0^2 (4\rho S d_0^2)^{-1} \cos 2\lambda_0 t$ и $\varepsilon_0 LV_0^2 (4\rho SR d_0^2)^{-1} (w'' + v')$. Первый из этих членов опущен по причине его нерезонансности, поэтому при изучении в дальнейшем параметрического резонанса в уравнениях (20.4) методом усреднения этот член обратился бы в нуль. Второй опущен потому, что он стоит в сумме с членом такого же типа $\varepsilon_0 LV_0^2 (\rho S d_0^3)^{-1} w \cos^2 \lambda_0 t$ и меньше его в R/d_0 раз.

Для уравнений (20.4) ставится задача построения границ областей устойчивости. Эти уравнения заменой (19.3) приводятся к виду (19.8). Для вычисления правых частей уравнений (19.8) в рассматриваемом случае вместо (19.4) нужно иметь в виду

$$\begin{aligned}
 F &\equiv \chi [\delta^2 (v'' - w') + \kappa^2 (w''' + v'')] \cos 2\varphi + \\
 &+ \xi_1 (\dot{w}''' + \dot{v}'') + \xi_2 (\dot{v}'' - \dot{w}') + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4R\rho S d_0^2} (w' + v) \cos 2\lambda_0 t, \quad (20.5) \\
 \Phi &\equiv \chi [\delta^2 (v' - w) - \kappa^2 (w^{IV} + v''')] \cos 2\varphi - \\
 &- \xi_1 (\dot{w}^{IV} + \dot{v}''') + \xi_2 (\dot{v}' - \dot{w}) + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{\rho S d_0^3} w \cos^2 \lambda_0 t.
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, для корректного рассмотрения задачи достаточно учитывать нулевую, вторую и четвертую формы колебаний. Учитывая это, получаем для коэффициентов при синусах и косинусах функций (20.5) выражения

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4\rho S R d_0^2} \alpha_0 \cos 2\lambda_0 t + \chi (-5\delta^2 x_2 + 6\kappa^2 \alpha_2), \\
 F_2^c &= 12\xi_1 \dot{x}_2 - 10\xi_2 \dot{x}_2 + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4\rho S R d_0^2} (4x_2 - 3\alpha_2) \cos 2\lambda_0 t + \\
 &+ \chi (-34\delta^2 x_4 + 120\kappa^2 \alpha_4), \\
 F_2^s &= 12\xi_1 \dot{\beta}_2 - 10\xi_2 \dot{y}_2 + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4\rho S R d_0^2} (4y_2 - 3\beta_2) \cos 2\lambda_0 t + \\
 &+ \chi (-34\delta^2 y_4 + 120\kappa^2 \beta_4), \\
 F_4^c &= 240\xi_1 \dot{x}_4 - 63\xi_2 \dot{x}_4 + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4\rho S R d_0^2} (8x_4 - 15\alpha_4) \cos 2\lambda_0 t + \\
 &+ \chi (-5\delta^2 x_2 + 6\kappa^2 \alpha_2), \\
 F_4^s &= 240\xi_1 \dot{\beta}_4 - 68\xi_2 \dot{y}_4 + \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{4\rho S R d_0^2} (8y_4 - 15\beta_4) \cos 2\lambda_0 t + \\
 &+ \chi (-5\delta^2 y_2 + 6\kappa^2 \beta_2), \\
 \Phi_0 &= \xi_2 \dot{y}_0 - \frac{\varepsilon_0 LV_0^2}{\rho S d_0^3} y_0 \cos^2 \lambda_0 t + \chi \left(\frac{5}{2} \delta^2 y_2 - 12\kappa^2 \beta_2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^c &= -24\xi_1\dot{\beta}_2 + 5\xi_2\dot{y}_2 + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(-y_2 + 2\beta_2)\cos^2\lambda_0t + \\
&+ \chi\left[\left(y_0 + \frac{17}{2}y_4\right)\delta^2 - 480\kappa^2\beta_4\right], \\
\Phi_2^s &= 24\xi_1\dot{x}_2 - 5\xi_2\dot{x}_2 + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(x_2 - 2\alpha_2)\cos^2\lambda_0t + \\
&+ \chi\left[-\frac{17}{2}\delta^2x_4 + 480\kappa^2\alpha_4\right], \\
\Phi_4^c &= -960\xi_1\dot{\beta}_4 + 17\xi_2\dot{y}_4 + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(-y_4 + 4\beta_4)\cos^2\lambda_0t + \\
&+ \chi\left[\frac{5}{2}\delta^2y_2 - 12\kappa^2\beta_2\right], \\
\Phi_4^s &= 960\xi_1\dot{x}_4 - 17\xi_2\dot{x}_4 + \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(x_4 - 4\alpha_4)\cos^2\lambda_0t + \\
&+ \chi\left(-\frac{5}{2}\delta^2x_2 + 12\kappa^2\alpha_2\right), \\
\xi_1 &= \frac{\xi I}{\rho SR^4}, \quad \xi_2 = \frac{\xi}{\rho R^2}.
\end{aligned}$$

Эти соотношения следует подставить в правые части уравнений (19.8), ограничивая эту бесконечную систему указанными тремя формами. В результате приходим к уравнениям

$$\begin{cases}
\ddot{\alpha}_0 = \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{4\rho SRd_0^2}\alpha_0\cos 2\lambda_0t + \chi(-\delta^2x_2 + 6\kappa^2\alpha_2), \\
\left. \begin{aligned}
\ddot{x}_2 + 5\delta^2x_2 &= \frac{48}{5}\xi_1\dot{\alpha}_2 - 5\xi_2\dot{x}_2 - \chi\left(\frac{153}{10}\delta^2x_4 - 144\kappa^2\alpha_4\right) + \\
&+ \frac{\varepsilon_0LV_0^2}{5\rho Sd_0^3}(x_2 - 2\alpha_2)\cos^2\lambda_0t, \\
\ddot{\alpha}_2 + \frac{36}{5}\kappa^2\alpha_2 &= -\frac{361}{5}\xi_1\dot{x}_2 - \chi\left(\frac{17}{5}\delta^2x_4 + 168\kappa^2\alpha_4\right) - \\
&- \frac{2\varepsilon_0LV_0^2}{5\rho Sd_0^3}(x_2 - 2\alpha_2)\cos^2\lambda_0t, \\
\ddot{x}_4 + 17\delta^2x_4 &= \frac{1}{17}\left[1920\xi_1\dot{\alpha}_4 - 289\xi_2\dot{x}_4 - \chi\left(\frac{45}{2}\delta^2x_2 - 36\kappa^2\alpha_2\right) + \right. \\
&+ \left.\frac{\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(x_4 - 4\alpha_4)\cos^2\lambda_0t\right], \\
\ddot{\alpha}_4 + \mu_2^2(4)\alpha_4 &= \frac{1}{17}\left[-3600\xi_1\dot{\alpha}_4 + \chi(5\delta^2x_2 - 42\kappa^2\alpha_2) - \right. \\
&- \left.\frac{4\varepsilon_0LV_0^2}{\rho Sd_0^3}(x_4 - 4\alpha_4)\cos^2\lambda_0t\right],
\end{aligned} \right\} \quad (20.6)
\end{cases}$$

$$\text{II } \left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{y}_0 + \delta^2 y_0 = -\xi_2 \dot{y}_0 - \chi \left(\frac{5}{2} \delta^2 y_2 - 12\kappa^2 \beta_2 \right) + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3} y_0 \cos^2 \lambda_0 t, \\
 \ddot{y}_2 + 5\delta^2 y_2 = \frac{48}{5} \xi_1 \dot{\beta}_2 - 5\xi_2 \dot{y}_2 - \chi \left(\frac{153}{10} \delta^2 y_4 + \frac{\delta^2}{5} y_0 - 144\kappa^2 \beta_4 \right) + \\
 \quad + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{5\rho S d_0^3} (y_2 - 2\beta_2) \cos^2 \lambda_0 t, \\
 \ddot{\beta}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \beta_2 = -\frac{36}{5} \xi_1 \dot{\beta}_2 - \chi \left(\frac{17}{5} \delta^2 y_4 - \frac{2}{5} \delta^2 y_0 + 168\kappa^2 \beta_4 \right) - \\
 \quad - \frac{2\varepsilon_0 L V_0^2}{5\rho S d_0^3} (y_2 - 2\beta_2) \cos^2 \lambda_0 t, \\
 \ddot{y}_4 + 17\delta^2 y_4 = \frac{1}{17} \left[1920\xi_1 \dot{\beta}_4 - 289\xi_2 \dot{y}_4 - \chi \left(\frac{45}{2} \delta^2 y_2 - 36\kappa^2 \beta_2 \right) + \right. \\
 \quad \left. + \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3} (y_4 - 4\beta_4) \cos^2 \lambda_0 t \right], \\
 \ddot{\beta}_4 + \mu_2^2 (4) \beta_4 = \frac{1}{17} \left[-3600\xi_1 \dot{\beta}_4 + \chi (5\delta^2 y_2 - 42\kappa^2 \beta_2) - \right. \\
 \quad \left. - \frac{4\varepsilon_0 L V_0^2}{\rho S d_0^3} (y_4 - 4\beta_4) \cos^2 \lambda_0 t \right].
 \end{array} \right.$$

При получении этих уравнений принималось, как и ранее, $G \simeq k$ и всюду пренебрегалось величиной d_0/R по сравнению с единицей.

Уравнения (20.6) распались на три независимые подсистемы: 0, I и II. Подсистема I в соответствии с заменой (19.3) описывает параметрическое возбуждение стоячей волны, ориентированной под углом 45° к главным осям диаграммы распределения плотности кольца. Подсистема II описывает параметрическое возбуждение стоячей волны с осями, совпадающими с осями диаграммы плотности. При этом в обоих случаях наряду с основной формой колебаний возбуждаются и все четные формы. В уравнениях (20.6) учитываются лишь две дополнительные формы.

Рассмотрим вначале параметрические колебания в подсистеме I. Эта подсистема восьмого порядка, и в первом приближении метода усреднения в ней возможны четыре параметрических резонанса:

$$\lambda_0^2 \simeq 5\delta^2, \quad \lambda_0^2 \simeq \frac{36}{5}\kappa^2, \quad \lambda_0^2 \simeq 17\delta^2 \quad \text{и} \quad \lambda_0^2 \simeq \frac{16 \cdot 225}{17}\kappa^2.$$

Мы будем рассматривать лишь резонанс по основной форме

$$\Delta = \lambda_0 - \frac{36}{5}(\kappa^2/\lambda_0) \sim \zeta. \quad (20.7)$$

Малым параметром считается величина

$$\zeta = 2\varepsilon_0 L V_0^2 / (5\rho S d_0^3),$$

характеризующая плотность электрических сил возбуждения. Остальными параметрами распорядимся так. Будем считать, что

коэффициенты диссипации ξ_1 и ξ_2 имеют порядок ζ . Параметр χ , характеризующий неравномерность плотности (или в соответствии с замечанием 3 параграфа 19 этот параметр может характеризовать овальность, разнотолщинность резонатора и т. п.), будем считать имеющим порядок $\sqrt{\zeta}$. Это предположение об относительно больших дефектах позволяет учесть их влияние уже в первом приближении метода осреднения.

В соответствии со сказанным подсистема ((20.6), I) в окрестности резонанса (20.7) без снижения точности может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} 5\delta^2 x_2 &= -\chi \left(\frac{153}{10} \delta^2 x_4 - 144\kappa^2 \alpha_4 \right), \\ \ddot{\alpha}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \alpha_2 &= -\frac{36}{5} \xi_1 \dot{\alpha}_2 - \chi \left(\frac{17}{5} \delta^2 x_4 + 168\kappa^2 \alpha_4 \right) - \\ &\quad - \zeta (x_2 - 2\alpha_2) \cos^2 \lambda_0 t, \\ 17\delta^2 x_4 &= -\frac{1}{17} \chi \left(\frac{45}{2} \delta^2 x_2 - 36\kappa^2 \alpha_2 \right), \\ \left(\frac{16.225}{17} - \frac{36}{5} \right) \alpha_4 &= \frac{1}{17} \chi (5\delta^2 x_2 - 42\kappa^2 \alpha_2). \end{aligned}$$

Здесь, как и всюду ранее, величина κ^2 считается пренебрежимо малой по сравнению с δ^2 .

Из этой системы, сохраняя лишь члены порядка ζ , получаем

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \alpha_2 = -\frac{36}{5} \xi_1 \dot{\alpha}_2 + A_1 \chi^2 \kappa^2 \alpha_2 + 2\zeta \alpha_2 \cos^2 \lambda_0 t, \quad (20.8)$$

где A_1 — коэффициент, совпадающий с вычисленным ранее коэффициентом (19.2). В уравнении (20.8) выполним замену переменных

$$\alpha_2 = b \cos \lambda_0 t + n \sin \lambda_0 t, \quad \dot{\alpha}_2 = \lambda_0 (-b \sin \lambda_0 t + n \cos \lambda_0 t).$$

Эта замена переменных соответствует замене по формулам (15.7) (переменные b и n имеют тот же смысл). После выполнения замены и осреднения по явному времени t имеем

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\zeta}{4\lambda_0} + A_1 \chi^2 \frac{\kappa^2}{2\lambda_0} \right) n - \frac{18}{5} \xi_1 b, \\ \dot{n} &= \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\zeta}{4\lambda_0} + A_1 \chi^2 \frac{\kappa^2}{2\lambda_0} \right) b - \frac{18}{5} \xi_1 n. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Как и ранее (см. (16.4)), уравнение для границы области неустойчивости в параметрах Δ , ζ выражается формулой

$$\left(\frac{18}{5} \xi_1 \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\zeta}{4\lambda_0} + A_1 \chi^2 \frac{\kappa^2}{2\lambda_0} \right) \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3\zeta}{4\lambda_0} + A_1 \chi^2 \frac{\kappa^2}{2\lambda_0} \right) = 0.$$

Графическое изображение границы приведено на рис. 25. Эта граница получается из границы области неустойчивости для слу-

чая отсутствия дефектов резонатора (см. рис. 23) параллельным переносом вдоль оси Δ в отрицательном ее направлении на величину $A_I \chi^2 \kappa^2 / \lambda_0$.

Перейдем к рассмотрению подсистемы (20.6, II). Как и подсистема I, она без снижения точности в окрестности рассматриваемого резонанса приводится к виду

$$\begin{aligned} \delta^2 y_0 &= -\chi \left(\frac{5}{2} \delta^2 y_2 - 12 \kappa^2 \beta_2 \right), \\ 5 \delta^2 y_2 &= -\chi \left(\frac{153}{10} \delta^2 y_4 + \frac{\delta^2}{5} y_0 - 144 \kappa^2 \beta_4 \right), \\ \ddot{\beta}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \beta_2 &= -\frac{36}{5} \xi_1 \beta_2 - \\ &\quad -\chi \left(\frac{17}{5} \delta^2 y_4 - \frac{2}{5} \delta^2 y_0 + 168 \kappa^2 \beta_4 \right) - \zeta (y_2 - 2\beta_2) \cos^2 \lambda_0 t, \\ 17 \delta^2 y_4 &= -\frac{1}{17} \chi \left(\frac{45}{2} \delta^2 y_2 - 36 \kappa^2 \beta_2 \right), \\ \left(\frac{16 \cdot 225}{17} - \frac{36}{5} \right) \kappa^2 \beta_4 &= \frac{1}{17} \chi (5 \delta^2 y_2 - 42 \kappa^2 \beta_2). \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно переменной β_2 , получаем

$$\ddot{\beta}_2 + \frac{36}{5} \kappa^2 \beta_2 = -\frac{36}{5} \xi_1 \beta_2 + A_{II} \chi^2 \kappa^2 \beta_2 + 2\zeta \beta_2 \cos^2 \lambda_0 t, \quad (20.10)$$

где коэффициент A_{II} совпадает с ранее найденным коэффициентом (19.3).

Уравнение (20.10) отличается от уравнения (20.8) лишь коэффициентом A_{II} . В качестве замены переменных в нем в соответствии с формулами (15.7) берется замена

$$\beta_2 = a \cos \lambda_0 t + m \sin \lambda_0 t, \quad \beta_2 = \lambda_0 (-a \sin \lambda_0 t + m \cos \lambda_0 t).$$

Уравнение границы области неустойчивости графически имеет изображенный на рис. 25 вид с заменой A_I на A_{II} .

Теперь заметим, что обе стоячие волны возбуждаются одновременно, так что область неустойчивости основной формы колебаний представляет собой объединение областей неустойчивости для подсистем I и II, изображенное на рис. 26. Существует единственная точка, соответствующая $\Delta_{\text{опт}}$, в которой обе гиперболы пересекаются и при настройке на которую системы возбуждения поддерживаться будут обе стоячие волны основной формы. При сдвиге частоты возбуждения вправо стоячая волна, соответствующая подсистеме II, затухнет и останется лишь волна с осями, расположенными под углом 45° к осям диаграммы плотности. Если частота возбуждения сдвигается влево, то затухает волна, ориентированная по осям диаграммы плотности. Оба случая искажают показания гироскопа и могут интерпретироваться как его уход.

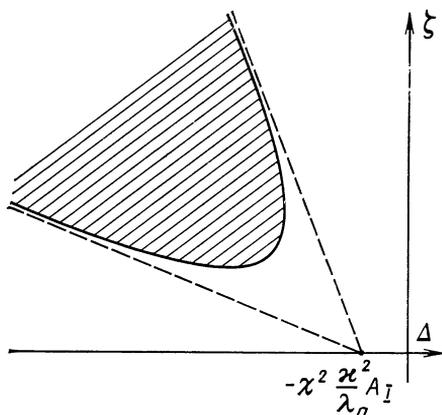


Рис. 25

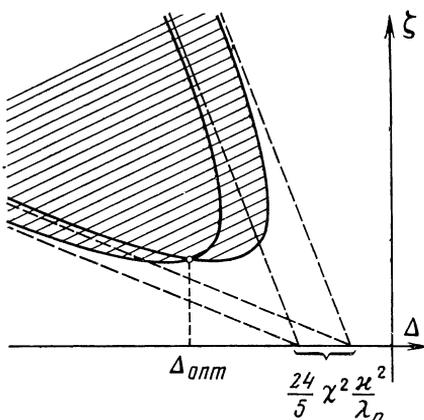


Рис. 26

Как и в случае резонатора без дефектов, настройка возбуждения на $\Delta_{\text{опт}}$ должна сопровождаться введением обратной связи вида (16.9). Исследование устойчивости стационарного режима не отличается от проведенного для резонатора без дефектов.

Найдем уход гироскопа для случая, когда $\Delta \neq \Delta_{\text{опт}}$. Будем для определенности считать, что $\Delta < \Delta_{\text{опт}}$ (от знака этого неравенства будет зависеть лишь знак ухода). В соответствии с диаграммой устойчивости на рис. 26 это означает, что периодическое решение возможно только для системы II. В системе I будет наблюдаться экспоненциальное затухание решения. Нам требуется найти показатель соответствующей экспоненты.

Вычислим вначале координаты точки пересечения границ устойчивости на рис. 26, соответствующей оптимальному возбуждению. Введем для сокращения выкладок временные обозначения:

$$\Delta/2 = x, \quad \zeta/(4\lambda_0) = y, \quad A_I \chi^2 (\kappa^2/2\lambda_0) = a_1, \\ A_{II} \chi^2 (\kappa^2/2\lambda_0) = a_2.$$

Кроме того, будем принимать во внимание обозначения (16.5). Координаты точки пересечения гипербол (x^*, y^*) должны удовлетворить двум уравнениям границ:

$$p^2 + (x + y + a_1)(x + 3y + a_1) = 0, \quad p^2 + (x + y + \\ + a_2)(x + 3y + a_2) = 0.$$

Решение этой системы, лежащее в интересующем нас квадранте, имеет вид

$$x^* = -1/2 (a_1 + a_2) - 2\sqrt{p^2 + (a_1 - a_2)^2/4}, \quad (20.11) \\ y^* = \sqrt{p^2 + (a_1 - a_2)^2/4},$$

что соответствует в исходных переменных выражениям

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{опт}} &= -\chi^2 \frac{\kappa^2}{2\lambda_0} (A_I + A_{II}) - 2 \sqrt{4p^2 + \chi^4 \frac{\kappa^4}{4\lambda_0^2} \left(\frac{24}{5}\right)^2}, \\ \zeta_{\text{опт}} &= 2\lambda_0 \sqrt{4p^2 + \chi^4 \frac{\kappa^4}{4\lambda_0^2} \left(\frac{24}{5}\right)^2}. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Пусть теперь (x^0, y^0) — точка, соответствующая рассматриваемому возбуждению с $\Delta < \Delta_{\text{опт}}$. Тогда эта точка принадлежит границе области устойчивости системы II

$$p^2 + (x^0 + y^0 + a_2)(x^0 + 3y^0 + a_2) = 0. \quad (20.13)$$

Соответствующее выражение для первой подсистемы не обращается в ноль:

$$p^2 + (x^0 + y^0 + a_1)(x^0 + 3y^0 + a_1) = \square \neq 0. \quad (20.14)$$

Перепишывая соотношения (20.13) и (20.14) в виде

$$\begin{aligned} p^2 + (x^0 + y^0)(x^0 + 3y^0) + a_2(2x^0 + 4y^0) + a_2^2 &= 0, \\ p^2 + (x^0 + y^0)(x^0 + 3y^0) + a_1(2x^0 + 4y^0) + a_1^2 &= \square \end{aligned}$$

и вычитая из второго первое, получаем

$$\square = (a_1 - a_2)(2x^0 + 4y^0 + a_1 + a_2). \quad (20.15)$$

Пусть $x^0 = x^* + \Delta x$, $y^0 = y^* + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x^*} \Delta x$, $\Delta x = y^* + y' \Delta x$. Подставляя эти соотношения в (20.15), находим

$$\square = 2(a_1 - a_2) \Delta x (1 + 2y'). \quad (20.16)$$

Производную y' найдем, дифференцируя (20.13) как неявную функцию

$$(1 + y')(x + 3y + a_2) + (x + y + a_2)(1 + 3y') = 0,$$

откуда

$$y' = -(x + 2y + a_2)/(2x + 3y + 2a_2).$$

Подставляя в эту формулу значение (20.11), убеждаемся, что y' имеет порядок $a_1 - a_2$ и в формуле (20.16) этот член может быть опущен.

В результате находим

$$\square = -\frac{24}{5} \chi^2 \frac{\kappa^2}{\lambda_0} \Delta x. \quad (20.17)$$

Характеристическое уравнение системы (20.9) имеет форму

$$\begin{vmatrix} -\lambda - p & -(x^0 + y^0 + a_1) \\ x^0 + 3y^0 + a_1 & -\lambda - p \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + 2p\lambda + p^2 + (x^0 + 3y^0 + a_1)(x^0 + y^0 + a_1) = 0$.

Учитывая соотношение (20.14), получаем

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \square = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = -p + \sqrt{p^2 - \square} \simeq -\frac{\square}{2p},$$

$$\lambda_2 = -p - \sqrt{p^2 + \square} \simeq -2p.$$

В результате общее решение системы (20.9) записывается в виде

$$b = -\frac{x^0 + y^0 + a_1}{\lambda_1 + p} C_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{x^0 + y^0 + a_1}{\lambda_2 + p} C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$n = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Ограничиваясь рассмотрением случая $p \ll \chi^2$, приближенно это общее решение запишется в виде

$$b \simeq C_1 e^{\lambda_1 t} - C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad n = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Следовательно, решение уравнения (20.8) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\alpha_2 = (C_1 e^{\lambda_1 t} - C_2 e^{\lambda_2 t}) \cos \lambda_0 t + (C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}) \sin \lambda_0 t.$$

Для вычисления «ухода» положим, что в начальный момент времени возбуждена стоячая волна с осями, расположенными под углом 45° к осям диаграммы плотности (или какого-либо другого дефекта):

$$w|_{t=0} = (r_0/\sqrt{2}) \sin 2\varphi; \quad \dot{w}|_{t=0} = (r_0\lambda_0)/\sqrt{2} \sin 2\varphi.$$

Учитывая, что в силу формул (19.3)

$$w \simeq 2(\beta_2 \cos 2\varphi - \alpha_2 \sin 2\varphi), \quad \dot{w} \simeq 2(\beta_2 \cos 2\varphi - \dot{\alpha}_2 \sin 2\varphi),$$

получим начальные условия по α_2 и β_2 :

$$\beta_2(0) = \dot{\beta}_2(0) = 0, \quad \alpha_2(0) = -r_0/(2\sqrt{2}), \quad \dot{\alpha}_2(0) = -\lambda_0 r_0/(2\sqrt{2}),$$

откуда находим начальные условия по a , m , b , n : $a(0) = m(0) = 0$, $b(0) = -r_0/(2\sqrt{2})$, $n(0) = -r_0/(2\sqrt{2})$. Частное решение по α_2 с этими начальными условиями имеет вид

$$\alpha_2 = -r_0/(2\sqrt{2}) e^{\lambda_1 t} (\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t).$$

После затухания этого частного решения, характеризующего начальную стоячую волну, устанавливается стоячая волна с ося-

ми по осям диаграммы дефекта, для которой $\alpha_2 \equiv 0$, $\beta_2 = = r_0/(2\sqrt{2}) (\cos \lambda_0 t + \sin \lambda_0 t)$. Учитывая, что обратная связь поддерживает амплитуду постоянной, по аналогии с соотношением (18.4) получаем, что $\max |\dot{\phi}| \simeq |\lambda_1| (\sqrt{2}/2)$. Или, учитывая выражение для λ_1 , имеем $\phi \sim \chi^2 \kappa^2 \Delta x / (p \lambda_0)$. Отношение $\Delta x / \lambda_0$ характеризует относительную погрешность настройки частоты возбуждения λ . Из приведенной формулы можно оценить требования к стабильности частоты возбуждения.

Пример. Пусть случайный уход $\phi \approx 10^{-2}$ °/ч, погрешность в радиусе $\Delta R = 10^{-6}$ м, для радиуса $R = 7,5 \cdot 10^{-2}$ м это дает $\chi = = \Delta R / R = 1,3 \cdot 10^{-5}$, $\kappa = 2,72 \cdot 10^2$ с⁻¹, $\lambda_0 = 7,3 \cdot 10^2$ с⁻¹, $p = = 10^{-2}$ с⁻¹ (остальные исходные данные берут из предыдущих примеров).

Стабильность частоты возбуждения $\Delta x / \lambda_0 = 0,4 \cdot 10^{-4}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечень основных формул и результатов теории кольцевых и полусферических резонаторов.

1. Частоты свободных колебаний тонкого нерастяжимого упругого невращающегося кольца (см. параграфы 1, 9)

$$\mu = \frac{k(k^2 - 1)}{2\pi \sqrt{k^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S R^4}} \text{ Гц}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где k — номер формы колебаний (равный половине числа узлов на кольце), E — модуль Юнга, ρ — плотность материала кольца, S — площадь поперечного сечения кольца, R — радиус кольца по средней линии, I — момент инерции поперечного сечения (если поперечное сечение — прямоугольник со сторонами h и L , где h — толщина кольца, а L — его ширина, то $I = Lh^3/12$).

2. Частота свободных колебаний того же кольца в случае его вращения с постоянной угловой скоростью Ω (см. параграфы 1, 9)

$$\mu = \frac{k(k^2 - 1)}{2\pi(k^2 + 1)} \sqrt{(k^2 + 1) \frac{EI}{\rho S R^4} + \Omega^2} \text{ Гц.}$$

3. Угол поворота стоячей волны в упругом нерастяжимом кольце относительно самого кольца в случае вращения его с переменной скоростью $\Omega(t)$ (см. введение, параграфы 11, 9)

$$\varphi(t) = - \frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(t) dt.$$

4. Частота побочных колебаний упругого растяжимого кольца (см. параграф 10)

$$\mu = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho} (1 + k^2)} \text{ Гц.}$$

5. Частота свободных колебаний полусферического резонатора

$$\mu = l(k) \frac{h}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{3(1 + \nu)\rho}} \text{ Гц,}$$

где $l(2) = 2,62$, $l(3) = 7,363$, $l(4) = 14,231$; . . . , h — толщина сферической о олоч , R — ее радиус, ν — коэффициент Пуассона (для плавленого кварца $\nu = 0,17$).

Эта ормула была получена Релеем [3, 9, 11].

6. Угол поворота стоячей волны во вращающемся с переменной скоростью $\Omega(t)$ полусферическом резонаторе относительно самого резонатора (см. параграф 13)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2(1-\nu)k^2} [(2+\nu) - \sqrt{(2+\nu)^2 + 4(1-\nu)k^2}] \int_0^t \Omega(t) dt.$$

7. Изгибающий момент в сечении кольца (см. параграф 1)

$$M = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right),$$

где w — деформация кольца в направлении радиуса.

Если форма колебаний имеет вид $w = aR \cos 2\varphi$, где a — безразмерная амплитуда колебаний кольца, то максимальное значение изгибающего момента

$$M_{\max} = \frac{3EI}{R} a.$$

Для кольца прямоугольного сечения максимальный изгибающий момент приводит к максимальному напряжению в сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{3Eh}{2R} a = \frac{1}{2} a\mu R \sqrt{15\rho E}.$$

Максимальное напряжение пропорционально произведению амплитуды колебаний aR на частоту колебаний μ . Таким образом, амплитуда и частота колебаний кольцевого резонатора по основной форме должны выбираться из условия

$$a\mu R < 2\sigma_{\max} / \sqrt{15\rho E}.$$

8. Частота колебаний кольца на основной форме $k = 2$ при угловой вибрации основания вокруг оси кольца (см. параграф 11)

$$\mu = \frac{6}{2\pi\sqrt{5}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S R^4} + \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j^2} \Gamma_{\text{ц}},$$

где Ω_j представляют собой амплитуды колебаний угловой скорости кольца в размерном времени:

$$\Omega(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j \sin \lambda_j t.$$

9. Скорость прецессии волны в упругом нерастяжимом кольце с учетом нелинейных эффектов (см. параграф 12)

$$\dot{\varphi} = -\frac{2\Omega}{k^2 + 1} - \Gamma(\omega, k) a^2 \sqrt{\frac{EI}{(\rho S R^4)}}.$$

Значения коэффициента $\Gamma(\omega, k)$ задаются таблицей. При этом ω — безразмерная скорость вращения основания

$$\omega = \Omega / \sqrt{EI / (\rho S R^4)}, \text{ для случая } k = 2 \text{ и малых } \omega \ (\omega < 0,1)$$

коэффициент $\Gamma(\omega, k)$ может быть представлен формулой $\Gamma(\omega, k) = 0,02167 \omega$, что в этом частном случае позволяет переписать формулу для прецессии волны в виде $\dot{\varphi} = -(\frac{2}{5} + 0,02167 a^2) \Omega$. Здесь a — нормированная на радиус кольца амплитуда колебаний на основной форме.

10. Нестабильность скорости прецессии волны ($\Delta\dot{\varphi}$), связанная с нестабильностью амплитуды колебаний (Δa) (см. параграф 12)

$$\Delta\dot{\varphi} = 0,04334a \cdot \Delta a.$$

Это выражение определяет «уход» гироскопа, определяемый нелинейностью модели резонатора.

11. Модель Кельвина—Фойхта упруговязкого тела в случае простейшего нагружения определяется соотношением

$$\sigma = \varepsilon E + \dot{\varepsilon} \xi,$$

где σ — напряжение в материале, ε — относительная деформация, ξ — коэффициент вязкости.

12. Время затухания свободных колебаний в кольце в e раз (см. параграф 14)

$$T = 5\rho R^4 S / (18\xi I) = 1/p$$

(p — показатель затухания)

13. Амплитуда установившихся колебаний кольца при действии позиционного возбуждения. Если между кольцом и внешними электродами приложено напряжение, изменяющееся по закону $V = V_0 \cos(\lambda_0/2) t \cos \varphi$, где V_0 — амплитуда напряжения в вольтах, $\lambda_0/2$ — частота, то такое возбуждение называется позиционным, а амплитуда колебаний кольца имеет вид (см. параграф 15)

$$aR = \frac{\varepsilon_0 L V_0^2}{2\rho S d_0^2 \lambda_0 \sqrt{\left(\frac{36\xi I}{\rho R^4 S}\right)^2 + 25\Delta^2}},$$

где ε_0 — константа, входящая в множитель пропорциональности, фигурирующий в законе Кулона для двух точечных зарядов $F = q_1 q_2 / 4\pi \varepsilon_0 r^2$, d_0 — зазор между кольцом и электродом, L — ширина электрода, расстройка частот $\Delta = \lambda_0 - 36EI / (5\lambda_0 \rho S R^4)$ характеризует разность между удвоенной частотой возбуждения λ_0 и отношением квадрата частоты собственных колебаний к частоте λ_0 .

14. Угол между направлением колебаний (направление главной оси основной формы колебаний) и направлением позиционно-го возбуждения (определяется положением электрода с максимальной амплитудой напряжения) в случае вращения основания имеет вид (см. параграф 15)

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2\Omega\rho R^4 S}{9\xi EI}.$$

15. Минимальное напряжение параметрического возбуждения. Если напряжение питания между кольцом и электродом изменяется по закону $V = V_0 \cos \lambda_0 t$, то такое возбуждение называется параметрическим, а минимальное значение амплитуды V_0 , при котором возможно возбуждение колебаний кольца, определяется формулой (см. параграф 16)

$$V_{0 \min} = 6 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{\pi h d_0^3 \lambda_0}{T}},$$

где d_0 — зазор между кольцом и электродом.

16. Оптимальная частота питания при параметрическом возбуждении (частота, определяющая минимум амплитуды возбуждения V_0) (см. параграф 16)

$$\lambda_0 = \frac{36EI}{5\lambda_0 \rho S R^4} - \frac{4}{T} \approx \frac{6}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S R^4}} - \frac{4}{T}.$$

17. Обратная связь при параметрическом возбуждении, управляющая напряжением возбуждения V_0 , в зависимости от относительной амплитуды колебаний a (см. параграф 16),

$$V_0 = V_{0 \min} - k(a - a_0),$$

где a_0 — требуемая амплитуда колебаний.

18. Прецессия стоячей волны в невращающемся кольце, обусловленная погрешностями параметрического возбуждения и характеризующая «уход» гироскопа (см. параграф 18),

$$|\varphi| \approx (2\varepsilon_{0e} u V_0 / (5\lambda_0 \rho h d_0^3 R a)),$$

где u — постоянная составляющая напряжения, $V = u + V_0 \cos \lambda_0 t$, e — амплитуда овальности кольцевого электрода.

19. Разность частот колебаний стоячей волны в двух направлениях, отличающихся на 45° , в случае кольца с плотностью, зависящей от угла. Рассматривается вторая гармоника распределения по углу величины обратной плотности

$$1/\rho = 1/\rho_0 + (\chi/\rho_0) \cos 2\varphi.$$

Главные полуоси диаграммы плотности соответствуют углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. В таком кольце стоячая волна с чистым тоном воз-

можно в двух случаях: первый, когда узлы стоячей волны лежат на оси диаграммы плотности (частота колебаний такой формы μ_1), второй случай, когда на осях диаграммы плотности лежат пучности стоячей волны (частота колебаний такой формы μ_2). Разность частот (см. параграф 19)

$$\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = (2/\sqrt{5})\chi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 S R^4}}.$$

20. Такая же разность частот возникает и в случае других дефектов:

$$\Delta\mu \sim \chi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 S R^4}},$$

где χ — относительная амплитуда второй гармоники разложения рассматриваемого параметра в ряд Фурье по углу φ ;

$R = R_0 (1 + \chi \cos 2\varphi)$ — радиус кольца,

$h = h_0 (1 + \chi \cos 2\varphi)$ — толщина кольца,

$E = E_0 (1 + \chi \cos 2\varphi)$ — модуль Юнга.

21. Прецессия стоячей волны в невращающемся кольце, обусловленная его дефектами и определяющая «уход» гироскопа (см. параграф 20),

$$|\varphi| \sim \frac{\chi^2 T E I}{\rho S R^4 \lambda_0} \Delta\lambda_0,$$

где $\Delta\lambda_0$ — нестабильность частоты возбуждения. Эта формула справедлива при достаточно малых дефектах, т. е. если

$$\frac{24}{5} \chi^2 \frac{EI}{\rho S R^4} \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \ll \frac{1}{T^2}.$$

Если же это условие не выполняется, то выражение для $|\varphi|$ определяется формулой

$$|\varphi| \sim \sqrt{\frac{1}{T^2} + \frac{24}{5} \chi^2 \frac{EI}{\rho S R^4} \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}} - \frac{1}{T}.$$

22. Основные уравнения колебаний резонаторов: упругое нерастяжимое кольцо (см. параграф 22)

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \frac{EI}{\rho S R^4} (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 0;$$

упругое растяжимое кольцо (см. параграф 10)

$$\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} - \frac{E}{\rho R^2} (v'' - w') - \frac{EI}{\rho R^4 S} (w''' + v'') = 0,$$

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} - \frac{E}{\rho R^2} (v' - w) + \frac{EI}{\rho R^4 S} (w^{IV} + v''') = 0,$$

где v — перемещение рассматриваемой точки кольца по касательной к недеформированной нейтральной линии.

Полусферический, невращающийся резонатор

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R^6} \Delta\Delta\Delta w + \frac{Eh}{R^4} \Delta w + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w = 0,$$

здесь Δ — оператор Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],$$

где θ — угол вдоль меридиана полусферической оболочки, отсчитываемый от ее вершины.

При задании граничных условий следует пользоваться соотношениями, связывающими внутренние усилия и моменты с деформациями срединной поверхности, приведенными в параграфе 13.

Приведенное уравнение можно найти в справочнике [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1964.
4. Журавлев В. Ф., Орешников В. Г. К определению характеристических показателей линейного дифференциального уравнения порядка n с периодическими коэффициентами и малым параметром.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 9.
5. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы, инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
6. Лось Ф. С. О принципе усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 3.
7. Новожилов В. В. Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке.— ДАН СССР, т. 27, № 6.
8. Луанкаре А. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. Т. 1.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. М.: Машиностроение, 1968.
10. Смирнов В. Н. Курс высшей математики. М.: Физматгиз, 1961.
11. Стретт Дж. В. (лорд Релей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955, Т. 1.
12. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс Р. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. Т. 5. Электричество и магнетизм.
13. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
14. Vanfi C. Sull' approssimazione di processi non stazionari in Meccanica non-lineare.— Boll. Unione mat. ital., 1967, vol. 22, N 4.
15. Besjes J. G. On the asymptotic methods for Non-linear differential equations.— J. méс., 1969, vol. 8, N 3.
16. Bryan G. H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell.— Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci., 1890, vol. 7, p. 101—114.
17. Glynn C. C. On the resonant nonlinear traveling waves in a thin rotating ring.— Intern. J. Non-Linear Mech., 1982, vol. 17, N 5/6, p. 327—340.
18. Scott W. B. Delco makes low-cost gyro prototype.— Aviat. Week, 1982. vol. 25, p. 64—72.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава I	
Основные уравнения динамики кольцевого резонатора . .	10
1. Вывод уравнений кольцевого резонатора методом сил	10
2. Вывод уравнений кольцевого резонатора методом Лагранжа	17
Глава II	
Элементы метода осреднения	21
3. Одночастотные системы	21
4. Математические основы метода осреднения	26
5. Построение высших приближений	30
6. Многочастотные системы. Резонанс	32
7. Метод осреднения для уравнений с частными производными	39
8. Метод двух масштабов	40
Глава III	
Динамика идеального резонатора	45
9. Динамические свойства упругого нерастяжимого кольца	45
10. Динамические свойства упругого растяжимого кольца	52
11. Точные решения уравнений динамики упругого нерастяжимого кольца	56
12. Нелинейные эффекты в упругом нерастяжимом кольце	64
13. Динамика полусферического резонатора	75
Глава IV	
Динамика неидеального кольцевого резонатора	82
14. Внутренняя диссипация и ее влияние на динамику резонатора	82
15. Позиционное возбуждение колебаний кольца	84
16. Параметрическое возбуждение колебаний кольца	87
17. Устойчивость стационарных режимов колебаний кольца при наличии параметрического возбуждения с обратной связью	91
18. Комбинированное возбуждение. «Уход» гироскопа	94
19. Собственные частоты кольцевого резонатора с зависящими от угла параметрами	100
20. Особенности параметрического возбуждения стоячих волн в кольце с двумя частотами на основной форме	108
Приложение	118
Литература	124

**Виктор Филиппович Журавлев
Дмитрий Михайлович Климов**

**ВОЛНОВОЙ
ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ГИРОСКОП**

Утверждено к печати
Институтом
проблем механики АН СССР

Редактор издательства О. М. Куликова
Художник С. Б. Генкина
Художественный редактор Н. А. Фильчагина
Технический редактор Т. В. Калинина
Корректоры Н. И. Казарина, Л. В. Письман

ИБ № 29141

Сдано в набор 05.02.85
Подписано к печати 25.04.85
Т-01103. Формат 60×90^{1/16}
Бумага книжно-журнальная
Гарнитура обыкновенная новая
Печать высокая
Усл. печ. л. 8. Усл. кр. отт. 8,25 Уч.-изд. л. 8
Тираж 1500 экз. Тип. зак. 1122
Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул., 30

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

**В издательстве «Наука»
вышла в свет книга**

Климов Д. М. Инерциальная навигация на море.— 9 л.

Излагается теория инерциальных систем, применяемых для навигации кораблей. Даются схемы и уравнения функционирования инерциальных систем навигации на море, исследуются их погрешности с использованием аппарата кинематики твердого тела с одной неподвижной точкой. Анализируются вопросы демпфирования и оценивания параметров инерциальных систем методами оптимальной фильтрации. Рассматривается теория невозмущаемых гироскопических систем, позволяющих построить вертикаль на корабле. Приводятся числовые примеры расчетов на ЭВМ.

Для специалистов в области прикладной математики и управления подвижными объектами.

**В издательстве «Наука»
готовится к печати книга**

Новиков Л. З., Шаталов М. Ю. Механика динамически настраиваемых гироскопов.— 20 л.

В книге рассмотрена механика новых типов чувствительных элементов — схемы динамически настраиваемых гироскопов, включающие гироскопы с одноосным упругим подвесом «вибратор», несимметричным ротором, упругим вращающимся подвесом и последовательным соединением нескольких колец. При исследовании используется точное решение уравнений движения, метод осреднения и методы, основанные на применении теоремы Резаля к определению уходов динамически настраиваемого гироскопа.

Для специалистов в области разработки гироскопических систем и систем инерциальной навигации.

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресу: 117192, Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петровзводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

- | | | | |
|--------|-----------------------------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------|
| 480091 | Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»); | 196034 | Ленинград, В/О, 9 линия, 16; |
| 370005 | Баку, ул. Джапаридзе, 13 («Книга — почтой»); | 220012 | Минск, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»); |
| 320093 | Днепропетровск, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»); | 103009 | Москва, ул. Горького, 19а; |
| 734001 | Душанбе, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»); | 117312 | Москва, ул. Вавилова, 55/7; |
| 375002 | Ереван, ул. Туманяна, 31; | 630076 | Новосибирск, Красный проспект, 51; |
| 664033 | Иркутск, ул. Лермонтова, 289; | 630090 | Новосибирск, Академгородок, Морской проспект, 22 («Книга — почтой») |
| 420043 | Казань, ул. Достоевского, 53; | 142292 | Пушино, Московская обл., МР, «В», 1; |
| 252030 | Киев, ул. Ленина, 42; | 620151 | Свердловск, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»); |
| 252030 | Киев, ул. Пирогова, 2; | 700029 | Ташкент, ул. Ленина, 73; |
| 252142 | Киев, проспект Вернадского, 79; | 700100 | Ташкент, ул. Шота Руставели, 43; |
| 252030 | Киев, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»); | 700187 | Ташкент, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»); |
| 277012 | Кишинев, проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»); | 634050 | Томск, наб. реки Ушайки, 18; |
| 443900 | Краматорск Донецкой обл., ул. Марата, 1; | 450059 | Уфа, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»); |
| 660049 | Красноярск, проспект Мира, 84; | 450025 | Уфа, ул. Коммунистическая, 49; |
| 443002 | Куйбышев, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»); | 720001 | Фрунзе, бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»); |
| 191104 | Ленинград, Литейный проспект, 57; | 310078 | Харьков, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»). |
| 199164 | Ленинград, Таможенный пер., 2; | | |

1 р. 20 к.